

N. Inv. 4188

Pope
Das ist
All
god

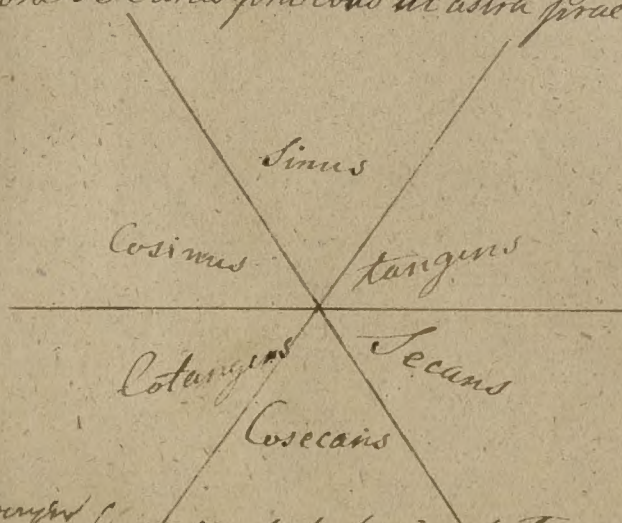
Mart
gebr
It
A. Geb

1. H
j
2. H
h
3. H
m
p
C
C

Pope sagt von Newton
Das ist die Inschrift auf seinem Monumente
All nature and her laws lay hid in night
God said: let Newton be! and all was light.

Martens Witken hat sein Werk „Floris al-
gebraica mit folgenden zwei Versen datirt

Vt sol In Coel. S. S. C. M. Lat a Lgebra temis,
A Lgebra S. C. artus phoebilis Vt astra praest.



1^{te} ~~Floris~~ Funktion in diesem viereckigen Theil der Kreis-
fläche = 1 $\text{np} \text{ tang } \alpha \times \text{ctg } \alpha = 1$

2^{te} ~~Floris~~ ^{Floris} durch Funktion nach dem pod der same Linie
bedeutet = Funktion vom isogenischen Theil der Kreis-
 $\text{np} \text{ Sin } \alpha \times \text{ctg } \alpha = \text{Cos } \alpha$; $\text{tg } \alpha \times \text{Cosec } \alpha = \text{Sec } \alpha$

3^{te} Floris durch eine solche Linie ist Funktion = Funktion
vom isogenischen Theil der Kreis-
 $\frac{\text{ctg } \alpha}{\text{Cos } \alpha} = \text{Cosec } \alpha$, $\frac{\text{tg } \alpha}{\text{Sec } \alpha} = \text{Sin } \alpha$, $\frac{\text{Sin } \alpha}{\text{Cos } \alpha} = \text{tg } \alpha$.

Cale i Line Paraphrase



Centymetry

Trig

$$\frac{y}{x} = \frac{r}{r}$$

$$\sin(\frac{1}{2}\pi)$$

$$\cos(\frac{1}{2}\pi)$$

$$\sin(-\pi)$$

$$\cos(-\pi)$$

$$\frac{y}{x} = \frac{r}{r}$$

$$\frac{r}{x} = \frac{r}{r}$$

$$\frac{r}{y} = \frac{r}{r}$$

$$\sin \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha)$$

$$\cos(\pi - \alpha)$$

$$\sin(\pi + \alpha)$$

$$\cos(\pi + \alpha)$$

$$\sin(\alpha \pm \beta)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta)$$

$$\sin^2 \alpha$$

$$\sin 2\alpha$$

$$\sin 3\alpha$$

$$\sin \frac{1}{4}\pi$$

$$\sin \frac{1}{2}\alpha$$

$$\cos \frac{1}{2}\alpha$$

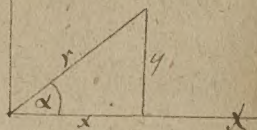
$$\sin \frac{1}{2}\alpha$$

Trigonometrische Formeln

2

$$\frac{y}{r} = \sin \alpha \quad \dots \quad y = r \sin \alpha$$

$$\frac{x}{r} = \cos \alpha \quad \dots \quad x = r \cos \alpha$$



$$\sin(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

($\frac{1}{2}\pi$ ist die halbe Peripherie)

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = +\cos \alpha$$

$$\frac{y}{x} = \tan \alpha \quad \dots \quad y = x \tan \alpha$$

$$\frac{r}{x} = \sec \alpha \quad \dots \quad r = x \sec \alpha$$

$$\frac{x}{y} = \cot \alpha \quad \dots \quad x = y \cot \alpha$$

$$\tan \alpha \cot \alpha = 1$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2} \text{ Chorda } 2\alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = +\cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

$$\sec(-\alpha) = +\sec \alpha$$

$$\csc(-\alpha) = -\csc \alpha$$

$$\sin \frac{1}{2}\pi = 1$$

$$\sin \frac{3}{2}\pi = -1$$

$$\cos \frac{1}{2}\pi = 0$$

$$\cos \pi = -1$$

$$\cos \frac{3}{2}\pi = 0$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \tan(45^\circ - \alpha)$$

$$\frac{\cos 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha} = \cot(45^\circ - \alpha)$$

$$\sin \frac{1}{2}\alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos \alpha}}{2}$$

$$\cos \frac{1}{2}\alpha = \frac{\sqrt{1 + \cos \alpha}}{2}$$

$$\sin \frac{1}{2}\alpha + \cos \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{1 + \sin \alpha}$$

$$\sin \frac{1}{2}\alpha - \cos \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{1 - \sin \alpha}$$

$$\tan \frac{1}{2}\alpha = \frac{\sqrt{1 + \sin \alpha} + \sqrt{1 - \sin \alpha}}{\sqrt{1 + \sin \alpha} - \sqrt{1 - \sin \alpha}}$$

$$\frac{1 + \sin 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha} = \tan^2(45^\circ + \alpha)$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}{\sec \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{\cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}} = \frac{1}{\sec \alpha} = \frac{\sqrt{\cos^2 \alpha - 1}}{\cos \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cot \alpha} = \frac{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}} = \frac{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}{\sec^2 \alpha - 1}$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}{\cot \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha - 1}}$$

$$\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{\tan \alpha} = \frac{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}{\cot \alpha} = \frac{\sec \alpha}{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}$$

$$\tan \alpha + \cot \alpha = 2 \csc 2\alpha$$

$$\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \csc 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\tan \frac{1}{2} \alpha = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\tan \frac{1}{4} \pi = \tan 45^\circ = 1$$

$$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$$

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

$$1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha = \cos \alpha$$

$$\sin \text{vers. } \alpha = 1 - \cos \alpha$$

$$\cos \text{vers. } \alpha = 1 - \sin \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\cot \alpha + \cot \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

$$\cot \alpha - \cot \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

$$\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta}$$

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} = \frac{\tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$$

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \tan \frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)$$

$$\frac{\sin \alpha \pm \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = \cot \frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$$

$$\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = -\frac{\cot \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} = \frac{\sec \alpha + \sec \beta}{\sec \alpha - \sec \beta}$$

$\sin \alpha$ ist gleich:

1. $\cos \alpha \operatorname{tg} \alpha$
2. $\frac{\cos \alpha}{\cot \alpha}$
3. $\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$
4. $\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$
5. $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$
6. $2 \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha$
7. $\sqrt{1 - \cos 2\alpha}$
8. $\frac{2 \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \alpha}$
9. $\frac{\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \alpha + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha}{\sqrt{3}}$
10. $\sin(30^\circ - \alpha) - \sin(30^\circ + \alpha)$
11. $2 \sin^2(45^\circ + \frac{1}{2} \alpha) - 1$
12. $1 - 2 \sin^2(45^\circ - \frac{1}{2} \alpha)$
13. $\frac{1 - \operatorname{tg}^2(45^\circ - \frac{1}{2} \alpha)}{1 + \operatorname{tg}^2(45^\circ - \frac{1}{2} \alpha)}$
14. $\frac{\operatorname{tg}(45^\circ + \frac{1}{2} \alpha) - \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{1}{2} \alpha)}{\operatorname{tg}(45^\circ + \frac{1}{2} \alpha) + \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{1}{2} \alpha)}$
15. $\sin(60^\circ + \alpha) - \sin(60^\circ - \alpha)$
16. $\frac{1}{\tan \alpha}$
17. $\frac{\cos(60^\circ - \alpha) - \cos(60^\circ + \alpha)}{\sqrt{3}}$
18. $2 \left(\sin(60^\circ + \alpha) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha \right)$
19. $2 \left(\frac{\sqrt{3} \cos \alpha}{2} - \sin(60^\circ - \alpha) \right)$
20. $\frac{e^{\alpha \sqrt{-1}} - e^{-\alpha \sqrt{-1}}}{2 \sqrt{-1}}$

$\cos \alpha$ ist gleich:

1. $\frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$
2. $\sin \alpha \cot \alpha$
3. $\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$
4. $\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$
5. $\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$
6. $\cos^2 \frac{1}{2} \alpha - \sin^2 \frac{1}{2} \alpha$
7. $1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha$
8. $2 \cos^2 \frac{1}{2} \alpha - 1$
9. $\sqrt{1 + \cos 2\alpha}$
10. $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \alpha}$
11. $\frac{\cot \frac{1}{2} \alpha - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha}{\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \alpha + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha}$
12. $\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha}{2}$
13. $\frac{\operatorname{tg}(45^\circ + \frac{1}{2} \alpha) + \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{1}{2} \alpha)}{2}$
14. $2 \cos(45^\circ + \frac{1}{2} \alpha) \cos(45^\circ - \frac{1}{2} \alpha)$
15. $\cos(60^\circ + \alpha) + \cos(60^\circ - \alpha)$
16. $\sec \alpha$
17. $\frac{\sin(60^\circ + \alpha) + \sin(60^\circ - \alpha)}{\sqrt{3}}$
18. $2 \left(\cos(60^\circ + \alpha) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \right)$
19. $2 \left(\cos(60^\circ - \alpha) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \right)$
20. $\frac{e^{\alpha \sqrt{-1}} + e^{-\alpha \sqrt{-1}}}{2}$

Lang α gleicht:

$$1. \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{Ch} \alpha - 2 \operatorname{Ch} 2\alpha$$

$$2. \operatorname{ctg} \alpha$$

$$3. \sqrt{\frac{1}{\cos \alpha} - 1}$$

$$4. \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$$

$$5. \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$$

$$6. \frac{2 \operatorname{Ch} \frac{1}{2} \alpha}{1 - \operatorname{Ch}^2 \frac{1}{2} \alpha}$$

$$7. \frac{2 \operatorname{Ch} \frac{1}{2} \alpha}{\operatorname{Ch}^2 \frac{1}{2} \alpha - 1}$$

$$8. \frac{2}{\operatorname{Ch} \frac{1}{2} \alpha - \operatorname{Ch} \frac{1}{2} \alpha} = \frac{2 \operatorname{Ch} \frac{\alpha}{2}}{2 - \sec^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \operatorname{Ch} \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2}$$

$$9. \operatorname{Ch} \alpha - 2 \operatorname{Ch} 2\alpha$$

$$10. \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$11. \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

$$12. \frac{\sqrt{1 - \cos 2\alpha}}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{\sqrt{1 + \sin 2\alpha} - \sqrt{1 - \sin 2\alpha}}{\sqrt{1 + \sin 2\alpha} + \sqrt{1 - \sin 2\alpha}}$$

$$13. \frac{\lg(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha) - \lg(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha)}{2}$$

$$14. \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha^2}{3 - \frac{\alpha^2}{5 - \frac{\alpha^2}{7 - \frac{\alpha^2}{9 - \alpha^2} \text{ etc.}}}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{e^{2\alpha\sqrt{-1}} - 1}{(e^{2\alpha\sqrt{-1}} + 1)\sqrt{-1}}$$

Wenn

oder m

Arcl

Arcl

Arcl

Arcl

Arcl

Arcl

Arcl

Arcl

Arcl

Arcl

Arcl

Da Vi

o/pun

o/pun

Arcl

Arcl

sin(n+

cos(n+

sin cos

cos cos

sin sin

sin +

sin -

cos +

cos -

Wenn $x = \sin \beta$, so ist, wenn x eine ^{ganze} positive oder negative Zahl bedeutet,

$$\text{Arc sin } x = 2r\pi + \beta$$

$$\text{Arc sin } x = (2r+1)\pi - \beta$$

$$\text{Arc cos } x = 2r\pi + \beta$$

$$\text{Arc cos } x = 2r\pi - \beta$$

$$\text{Arc sin } (-x) = 2r\pi - \beta = (2r+1)\pi + \beta$$

$$\text{Arc cos } (-x) = (2r+1)\pi + \beta = (2r+1)\pi - \beta$$

$$\text{Arc sin } x = \text{Arc cos } \sqrt{1-x^2} = \text{Arc tg } \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arc sec } \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{Arc cos } x = \text{Arc sin } \sqrt{1-x^2}$$

da $\sqrt{1-x^2}$ den Cosinus eines Bogens vorstellt, dessen Sinus $= x$, und den Sinus eines Bogens, dessen Cosinus $= x$.

$$\text{Arc tg } x = \text{Arc sin } \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \text{Arc ctg } \frac{1}{x} = \text{etc.}$$

$$\sin(n+1)\beta = 2 \cos \beta \sin n\beta - \sin(n-1)\beta$$

$$\cos(n+1)\beta = 2 \cos \beta \cos n\beta - \cos(n-1)\beta$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} \sin(\beta - \alpha)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$$

$$\text{tg } \alpha \pm \text{tg } \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\text{ctg } \alpha \pm \text{ctg } \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$$

$$\begin{aligned} \cos \frac{1}{2} \beta - \sin \frac{1}{2} \beta &= \sqrt{1 - \sin \beta} \\ \cos \frac{1}{2} \beta + \sin \frac{1}{2} \beta &= \sqrt{1 + \sin \beta} \\ \cos \frac{1}{2} \beta &= \frac{\sqrt{1 + \sin \beta} + \sqrt{1 - \sin \beta}}{2} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} \cos \alpha - \sin \beta &= \cos(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta) \\ \lg \alpha - \lg \beta &= \frac{\sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha + \beta)}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta} \end{aligned} \right.$$

$$\sin \frac{1}{2} \beta = \frac{\sqrt{1 + \sin \beta} - \sqrt{1 - \sin \beta}}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin \beta + \sin \gamma - \sin \alpha &= 4 \cos \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta \sin \frac{1}{2} \gamma \\ \sin \alpha + \sin \gamma - \sin \beta &= 4 \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta \sin \frac{1}{2} \gamma \\ \sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma &= 4 \sin \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lg(\alpha + \beta) &= \frac{\lg \alpha + \lg \beta}{1 - \lg \alpha \lg \beta} & \sin \alpha &= \frac{e^{\alpha \sqrt{-1}} - e^{-\alpha \sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \\ \lg(\alpha - \beta) &= \frac{\lg \alpha - \lg \beta}{1 + \lg \alpha \lg \beta} & \cos \alpha &= \frac{e^{\alpha \sqrt{-1}} + e^{-\alpha \sqrt{-1}}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 + \sin \alpha)^{\frac{1}{2}} &= \cos \frac{1}{2} \alpha + \sin \frac{1}{2} \alpha & e^{\alpha \sqrt{-1}} &= \cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha \\ (1 - \sin \alpha)^{\frac{1}{2}} &= \cos \frac{1}{2} \alpha - \sin \frac{1}{2} \alpha & e^{-\alpha \sqrt{-1}} &= \cos \alpha - \sqrt{-1} \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(m+1)\beta &= \sin m\beta \cos \beta + \cos m\beta \sin \beta \\ \cos(m+1)\beta &= \cos m\beta \cos \beta - \sin m\beta \sin \beta \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} e &= 2,7182818 \\ \text{und} \quad \lg. \text{brg. } e &= 0,43429448 \end{aligned} \right.$$

und wenn man in diesen Formeln $m = 1, 2, 3, 4, \dots$ setzt, so ergeben sich die Sinusse und Cosi, ~~müsse~~ ^{müssen} ~~aller~~ ^{aller} Vielfachen. —

$$\sin(m+2)\beta = 2 \sin m\beta \cos 2\beta - \sin(m-2)\beta$$

$$\cos(m+2)\beta = 2 \cos m\beta \cos 2\beta - \cos(m-2)\beta$$

mit also

$$\cos 2\beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \quad \text{und} \quad \sin(30^\circ + \alpha) = \sin(30^\circ - \alpha) + \sin \alpha / 2$$

$$\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta \quad \text{also}$$

$$\cos 2\beta = 1 - 2 \sin^2 \beta, \quad \text{so ist}$$

$$\sin(m+2)\beta = 2(1 - 2 \sin^2 \beta) \sin m\beta - \sin(m-2)\beta$$

$$\cos(m+2)\beta = 2(1 - 2 \sin^2 \beta) \cos m\beta - \cos(m-2)\beta$$

Setzt man hier $m = 2, 4, 6, 8, \text{ etc}$
mit Rücksicht auf die Gleichung.

$$\sin 2\beta = 2 \sin \beta \cos \beta$$

erhält man $\sin 4\beta = 2 \sin 2\beta \cos 2\beta$ ^{von geraden Zahlen}
so erhält man $\sin 6\beta = 2 \sin 3\beta \cos 3\beta$ ^{oder}
für ungerade Zahlen, setzt man aber $m = 1, 3, 5, 7, \text{ etc}$
so wird man erhalten die von ungeraden Zahlen.

$$\sin(R \pm \alpha) = \pm \cos \alpha$$

$$\cos(R \pm \alpha) = \mp \sin \alpha$$

$$\sin(2R \pm \alpha) = \mp \sin \alpha$$

$$\cos(2R \pm \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(3R \pm \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cos(3R \pm \alpha) = \pm \sin \alpha$$

$$\sin(4R \pm \alpha) = \pm \sin \alpha$$

$$\cos(4R \pm \alpha) = +\cos \alpha$$

wenn R ~~ein~~ rechten Winkel
bedeutet.

$$\begin{aligned}
\sin 34^\circ &= \cos \alpha \\
\sin(3^\circ - \alpha) &= \cos \alpha \\
\sin(6^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha \\
\sin(6^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\
\sin(9^\circ + \alpha) &= -\cos \alpha \\
\sin(9^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha \\
\sin(12^\circ + \alpha) &= \sin \alpha \\
\sin(12^\circ - \alpha) &= -\sin \alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lg 34^\circ &= -\lg \alpha \\
\lg(3^\circ - \alpha) &= \lg \alpha \\
\lg(6^\circ + \alpha) &= \lg \alpha \\
\lg(6^\circ - \alpha) &= -\lg \alpha \\
\lg(9^\circ + \alpha) &= -\lg \alpha \\
\lg(9^\circ - \alpha) &= \lg \alpha \\
\lg 12^\circ + \alpha &= \lg \alpha \\
\lg 12^\circ - \alpha &= -\lg \alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos 34^\circ &= -\sin \alpha \\
\cos(3^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\
\cos(6^\circ + \alpha) &= -\cos \alpha \\
\cos(6^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha \\
\cos(9^\circ + \alpha) &= \sin \alpha \\
\cos(9^\circ - \alpha) &= -\sin \alpha \\
\cos(12^\circ + \alpha) &= \cos \alpha \\
\cos(12^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{ctg} 34^\circ &= -\operatorname{tg} \alpha \\
\operatorname{ctg}(3^\circ - \alpha) &= \operatorname{tg} \alpha \\
\operatorname{ctg}(6^\circ + \alpha) &= \operatorname{ctg} \alpha \\
\operatorname{ctg}(6^\circ - \alpha) &= -\operatorname{ctg} \alpha \\
\operatorname{ctg}(9^\circ + \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha \\
\operatorname{ctg}(9^\circ - \alpha) &= \operatorname{tg} \alpha \\
\operatorname{ctg} 12^\circ + \alpha &= \operatorname{ctg} \alpha \\
\operatorname{ctg} 12^\circ - \alpha &= -\operatorname{ctg} \alpha
\end{aligned}$$

Der Halbmesser ist gleich in der Länge dem Bogen
 von $5^\circ 31' 44''$ $\beta = 206264''$ $\frac{81}{100}$ und Logarithmus
 davon ist $= 5.3144252$

In einem geradlinigten Dreieck dessen Winkel α, β, γ , hiessen finden folgende Gleichungen Statt:

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \gamma$$

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 4 \sin \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta \sin \frac{1}{2} \gamma$$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 1$$

$$\lg \alpha + \lg \beta + \lg \gamma = \lg \alpha \lg \beta \lg \gamma$$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma = 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma$$

$$\sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma = 4 \sin \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \gamma$$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma = 4 \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma$$

Set a der Halbmesser der Kugel, so ist ihre Oberfläche $= 4a^2\pi$ und ihr körperlicher Inhalt $= \frac{4a^3\pi}{3}$.

Der umschriebene Cylinders nur Höhe dem Durchmesser der Kugel hat, so ist dessen Krümmenfläche $= 4a^2\pi$, und dessen ganze Oberfläche $= 6a^2\pi$ und dessen körperlicher Inhalt $= 2a^3\pi$.

Der umschriebene gleichseitige Kegel hat die Höhe $3a$, also ist jede seiner Seitenlinien gleich $a\sqrt{12}$ und daher die Krümmen Oberfläche des Kegels $= 6a^2\pi$, die ganze Oberfläche desselben $= 9a^2\pi$ und ihr körperlicher Inhalt $= 3a^3\pi$.

Sind a, b, c , die Seiten und α, β, γ die gegenüber liegenden Winkel eines gedachten Dreiecks, so ist uns bekannt seine Fläche F

$$F = \frac{1}{2} bc \sin \alpha,$$

Sind zwei Winkel α, β und die an liegende Seite c gegeben, so ist

$$F = \frac{1}{2} c^2 \frac{\sin \alpha \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta} = \frac{1}{2} c^2 \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Sind die drei Seiten gegeben, so ist

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \text{ also auch}$$

$$1 + \cos \gamma = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2ab} \text{ und}$$

$$1 - \cos \gamma = \frac{(a+c-b)(b+c-a)}{2ab}$$

Das Produkt der beiden letzten Gleichungen gibt $1 - \cos^2 \gamma$ oder $\sin^2 \gamma$, und da $F = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$ ist, so hat man

$$F = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$$

Für das gleichschenkelige Dreieck ist $b=c$, also auch

$$F = \frac{a}{4} \sqrt{4b^2 - a^2}$$

Für das gleichseitige Dreieck ist $a=b=c$, also auch

$$F = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$$

Es ist auch

$$F = \frac{1}{2} p^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \frac{1}{4} p^2 \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{1}{4} p^2 \sin^2 \frac{1}{2}(\pi) = \frac{1}{4} p^2$$

Auflösung der Dreiecke

1. ebene Dreiecke und Polygonen

a, b, c sind die Seiten
 α, β, γ die Winkel

$$\sin \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s-b)(\frac{1}{2}s-c)}{bc}} \quad s = a+b+c$$

Wenn S die Oberfläche eines Dreiecks bedeutet, so ist

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{---} \quad ps = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

$$S = \frac{bc}{2} \sin \alpha$$

Die Oberfläche eines Trapezes ist

$$T = \frac{1}{2}g \sqrt{(a+c+g)(a+g-c)(c+g-a)(a+c-g)} \quad \text{---} \quad g = d-b$$

und a, b, c, d sind seine vier Seiten, oder

$$T = \frac{1}{2} \sqrt{p'(p'-a)(p'-c)(p'-g)} \quad p' \text{ ist die halbe Perim. des Dreiecks } acg$$

daher die Oberfläche eines Trapezes

$$\Sigma = \frac{b+d}{2} \sqrt{p'(p'-a)(p'-c)(p'-g)}$$

Die Oberfläche eines gleichseitigen Polygon, wenn eine Seite n bekannt ist und die Anzahl n der Seiten,

$$\text{ist} \quad \Sigma = \frac{1}{4} n n^2 \sin \frac{2\pi}{n} \quad \text{---} \quad \text{L bezeichnet das Produkt}$$

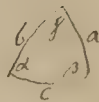
über die Senkrechte aus Centrum des Polygons

$$p \text{ auf } \text{---} \text{ Seiten oder Apothema ist } = \frac{1}{2} n \sin \frac{2\pi}{n} = x$$

$$\text{also} \quad \Sigma = n n x \text{ d. h. } = \text{dem Produkt aus } p \text{ und Perimeter und Apothema. ---}$$

2. Sphärische Dreiecke

a, b, c bezeichnen immer die Seiten
 α, β, γ die Winkel



$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \sin \beta \sin \gamma \cos a - \cos \beta \cos \gamma$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \sin \beta \sin \gamma \cos a - \cos \beta \cos \gamma$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \cos \beta \sin \alpha \cos c - \cos a \sin c$$

$$\cot \alpha \sin c = \cot \alpha \sin \beta + \cos c \cos \beta$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \cos a \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \cos c$$

In jedem ^{sphärischen} Dreieck läßt es sich ein anderes, das
 sogenannte Polardreieck finden, dessen Seiten mit
 den Winkel des ersten, und dessen Winkel mit den
 Seiten des ersten stückweise zusammengenommen
 π oder 180° geben, d. h. jedes Dreieck ^{Karte} aus jedem ande-
 ren der kugelflächen hat Gleichungen abgeleitet wer-
 den kann, wenn man ^{darin} anstatt $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$
 $\pi - a, \pi - b, \pi - c, \pi - \alpha, \pi - \beta, \pi - \gamma$ setzt

Dieses Polar

Rechtwinklige sphärische Dreiecke



$$\cos h = \cos a \cos b = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin h}$$

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} h}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b}$$

$$\cos a = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} = \cos \alpha \sin b$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} a \sin b$$

$$\sin a = \sin h \sin \alpha$$

$$\operatorname{ctg} h = \operatorname{ctg} b \cos \alpha$$

$$\cos h$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} h = - \frac{\cos (a+b)}{\cos (a-b)}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \alpha = \frac{\sin (h-b)}{\sin (h+b)}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} a = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} (h+b) \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} (h-b)$$

$$\operatorname{tg} (45^\circ - \frac{1}{2} a) = \sqrt{\operatorname{tg} (45^\circ - x)}$$

$$\operatorname{tg} x = \sin h \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \alpha = \operatorname{tg}^2 (\frac{x-\beta}{2} + 45^\circ) \operatorname{tg}^2 (\frac{\alpha+\beta}{2} - 45^\circ)$$

Schiefwinklige sphärische Dreiecke

$$\cos \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} (a+b+c) \sin \frac{1}{2} (b+c-a)}{\sin b \sin c}}$$

$$\sin \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} (a+b-c) \sin \frac{1}{2} (a-b+c)}{\sin b \sin c}}$$

$$\sin \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos \frac{1}{2} (\alpha+\beta+\gamma) \cos \frac{1}{2} (\beta+\gamma-\alpha)}{\sin \beta \sin \gamma}}$$

$$\cos \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2} (\alpha+\beta-\gamma) \cos \frac{1}{2} (\alpha-\beta+\gamma)}{\sin \beta \sin \gamma}}$$

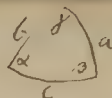
$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$\cos a = \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}$$

(I)

333

Gauß'sche Formeln



$$\cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$$

$$\cos \frac{\alpha-\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$$

$$\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = \cos \frac{a-b}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$$

$$\sin \frac{\alpha-\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$$

Trigonometrische Analogieen

$$\lg \frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} \lg \frac{1}{2}\gamma$$

$$\lg \frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \lg \frac{1}{2}\gamma$$

$$\lg \frac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \lg \frac{1}{2}\gamma$$

$$\lg \frac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \lg \frac{1}{2}\gamma$$

$$\lg \frac{1}{2}\alpha = \frac{\sin \frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin \frac{1}{2}(b+c-a)} \lg \frac{1}{2}\gamma = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \lg \frac{1}{2}\gamma$$

$$\lg \frac{1}{2}\beta = \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin \frac{1}{2}(a+c-b)} \lg \frac{1}{2}\gamma$$

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

Demnach $\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{a+1} \pm \sqrt{a-1}$, so ist auch $a + \sqrt{b} = (a+1) \pm (a-1)$ also
 $a = x+3$ und $\sqrt{b} = 2\sqrt{x+3}$, daher $b = 4(x+3)$ und $3 = \frac{b}{4x}$
 $a = x + \frac{b}{4x}$ oder $a^2 - ax = -\frac{b}{4}$ also $a = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{a^2 - b}{4}} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - b}}{2}$
 $b = a - x$ und es folgt die vorige Formel.

Die Fläche eines Dreiecks, geradenwinkligen ist

$S = \frac{abc}{4r}$ wo abc die drei Seiten und r der Halbmesser des um das Dreieck eingeschriebenen Kreises ist.
 Der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises = $\frac{2A}{a+b+c}$

Die zwei Gleichungen (I) werden einfacher wenn man in der ersten

$$\lg \frac{1}{2}x = \lg \frac{1}{2}(b+a) \lg \frac{1}{2}(b-a) \cot \frac{1}{2}c$$

und in der zweiten

$$\lg \frac{1}{2}x = \lg \frac{1}{2}(x+\beta) \lg \frac{1}{2}(\beta-x) \lg \frac{1}{2}x$$

Setzt, dann auf die Art wird man bekommen

$$\cos \alpha = \lg \beta \lg \frac{1}{2}(c+x)$$

$$\cos \beta = \lg \alpha \lg \frac{1}{2}(c-x)$$

und

$$\cos \alpha = \lg \beta \lg \frac{1}{2}(y-x)$$

$$\cos \beta = \lg \alpha \lg \frac{1}{2}(y+x)$$

Der körperliche Gehalt eines schiefen Parallelepipedums dessen drei in einem und denselben Punkte auflaufende Kanten a, b, d sind die Winkel $(a, b), (a, d), (b, d)$ oder α, β, γ sind,

$$ist S = 2abc \sqrt{\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha+\gamma}{2} \sin \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \sin \frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}}$$

Das Quadrat der Hypotenuse eines gleichschenkeligen rechtwinkligen Dreiecks ist das vierteltheil der Fläche dieses Dreiecks, wenn man α die Hypotenuse, β und γ die zwei Schenkel be-
 zeichnet, so ist $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ aber $\beta = \gamma$ nun
 die Fläche = $\frac{\beta \times \gamma}{2} = \frac{\beta^2}{2}$, also $4H^2 = \alpha^2$.

1. den Höhenpunkt eines Trapes zu finden



Aus drei Seiten eines sphärischen Dreiecks
die Fläche F derselben finden

$$\text{ctg } \frac{F}{2} = \frac{\text{ctg } \frac{\alpha}{2} \text{ctg } \frac{\beta}{2} + \cos C}{\sin C}$$

Es ist aber $\cos C = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}$ und

$$\text{ctg } \frac{\alpha}{2} \text{ctg } \frac{\beta}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{1 + \cos \beta}{\sin \beta} \text{ also auch}$$

$$\text{ctg } \frac{\alpha}{2} \text{ctg } \frac{\beta}{2} + \cos C = \frac{1 + \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}$$

Weiter ist $\sin C = 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$ also auch
 $\sin C = 2 VM$, wo

$$M = \sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \sin \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} \sin \frac{\alpha + \gamma - \beta}{2} \sin \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2}$$

und daher endlich

$$\text{ctg } \frac{F}{2} = \frac{1 + \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{2 VM} \text{ eben so findet man}$$

$$\sin \frac{F}{2} = \frac{VM}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} \text{ und}$$

$$\cos \frac{F}{2} = \frac{1 + \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} \text{ und endlich}$$

$$\lg \frac{1}{4} F = V \left\{ \lg \frac{\alpha + \beta + \gamma}{4} + \lg \frac{\beta + \gamma - \alpha}{4} + \lg \frac{\alpha + \gamma - \beta}{4} + \lg \frac{\beta + \gamma - \alpha}{4} \right\}$$

In jedem geraden Dreieck ist zwischen
den drei Seiten a, b, c und den Winkeln
 α, β, γ folgendes Verhältniß

$$\lg a = \frac{\frac{a}{b} \sin \gamma}{1 - \frac{a}{b} \cos \gamma}$$

Da $\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ aber $\beta = 180 - (\alpha + \gamma)$

so setzen auch $\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \gamma)} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma}$

oder $\frac{a}{b} = \frac{\lg a}{\lg a \cos \gamma + \sin \gamma}$

$(1 - \frac{a}{b} \cos \gamma) \lg a = \frac{a}{b} \sin \gamma$ $(1 - \frac{a}{b} \cos \gamma) \lg a = \frac{a}{b} \sin \gamma$

und daraus die obige Gleichung.

Sucht man aus dieser Gleichung α , so ist

$$\alpha = \frac{a}{b} \frac{\sin \gamma}{\sin 1''} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} \right)^2 \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2''} + \frac{1}{3} \left(\frac{a}{b} \right)^3 \frac{\sin 3\gamma}{\sin 3''} + \dots$$

vernachlässigt man die höheren Potenzen, so ist

einfach $\alpha = \frac{a}{b} \frac{\sin \gamma}{\sin 1''}$

Die gezeigte Reihe wird auf folgende Art gefunden

Es ist wie oben $a \sin \beta = b \sin \alpha = b$ oder

$$b \sin \alpha = a (\sin(\alpha + \gamma)) = a (\sin \alpha \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha)$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a \sin \gamma}{b - a \cos \gamma}$$

Setzt man anstatt $\sin \alpha, \cos \alpha$

$\sin \gamma$ und $\cos \gamma$ die imaginären Ausdrücke, so wird

$$\frac{e^{\alpha \gamma} - e^{-\alpha \gamma}}{e^{\alpha \gamma} + e^{-\alpha \gamma}} = \frac{a (e^{\gamma} - e^{-\gamma})}{2b - a(e^{\gamma} + e^{-\gamma})}$$

oder

$$\frac{e^{2\alpha V-1} - 1}{e^{2\alpha V-1} + 1} = \frac{a \alpha (e^{\alpha V-1} - e^{-\alpha V-1})}{2b - a(e^{\alpha V-1} + e^{-\alpha V-1})} \quad \text{und daraus}$$

$$e^{2\alpha V-1} = \frac{b - a e^{-\alpha V-1}}{b - a e^{\alpha V-1}}$$

Nimmt man auf beiden Seiten die Logarithmen so findet man

$$2\alpha V-1 = \log \frac{b - a e^{-\alpha V-1}}{b - a e^{\alpha V-1}}$$

Entwickelt man den log. in rechte Glied nach der Formel $\log(a-x) = \log a - \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^3}{3a^3} - \dots$

so bekommt man

$$2\alpha V-1 = \frac{a}{b} e^{\alpha V-1} + \frac{a^2}{2b^2} e^{2\alpha V-1} + \frac{a^3}{3b^3} e^{3\alpha V-1} + \dots - \frac{a}{b} e^{-\alpha V-1} - \frac{a^2}{2b^2} e^{-2\alpha V-1} - \frac{a^3}{3b^3} e^{-3\alpha V-1} - \dots$$

Dividirt man auf beiden Seiten durch $2V-1$ und bemerkt das allgemein $e^{m\alpha V-1} - e^{-m\alpha V-1} = 2V-1 \sin m\gamma$ so findet man

$$\alpha = \frac{a}{b} \sin \gamma + \frac{a^2}{2b^2} \sin 2\gamma + \frac{a^3}{3b^3} \sin 3\gamma + \dots$$

$(V-1)^0 = 1$	Allgemein wenn x irgend eine	
$(V-1)^1 = V-1$	ganze positive oder negative	
$(V-1)^2 = -1$	Zahl bedeutet, so ist	
$(V-1)^3 = -V-1$	$(V-1)^{4V} = 1$	
$(V-1)^4 = 1$	$(V-1)^{4V+1} = V-1$	oder auch $(V-1)^{4V+3} = V-1$
$(V-1)^5 = V-1$	$(V-1)^{4V+2} = -1$	$(V-1)^{4V+2} = -1$
u. s. w.	$(V-1)^{4V+3} = -V-1$	$(V-1)^{4V+1} = -V-1$

Heißt φ'' ein Bogen in Sekunden ausgedrückt so ist $\varphi'' = \frac{\sin \varphi}{\sin 1''}$ und $\sin \varphi = \varphi'' \sin 1''$
 d. h. will man den Sinus in Bogen-Sekunden verwandeln so muß man ihn mit $\sin 1''$ dividiren und umgekehrt.

Regula falsi

Sagen

$\begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{zwei Hypothesen} \end{array} \right.$

und

$\begin{matrix} F_1 \\ F_2 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fehler der Resultate} \end{array} \right.$

so ist der genauere Werth den wir x nennen wollen

$$x = s_1 - \frac{F_1(s_2 - s_1)}{F_1 - F_2} = s_2 - \frac{F_2(s_1 - s_2)}{F_1 - F_2}$$

^{der Logarithmus}
Um die Tangente und Tangenten kleiner Bögen
sehr genau zu finden dienen folgende Formeln

$$\log \sin \alpha = \log \alpha + 4.68557119 - \frac{1}{3}(10 - \log \cos \alpha)$$

$$\log \tan \alpha = \log \alpha + 4.68557119 + \frac{2}{3}(10 - \log \cos \alpha)$$

Umgekehrt wenn aus dem gegebenen Logarithmus des
Sinus oder der Tangente eines kleinen Winkels der
Winkel selbst zu finden hat man folgende Formel

$$\log \alpha = \log \sin \alpha + 5.3144251 - 10 + \frac{1}{3}(10 - \log \cos \alpha)$$

$$\log \alpha = \log \tan \alpha + 5.3144251 - 11 - \frac{2}{3}(10 - \log \cos \alpha)$$

Diese Formeln setzen voraus, daß der kleine Bogen
oder Winkel α in Sekunden ausgedrückt sey. Sie geben
bei der Anwendung siebenstelligen Logarithmen das Ge-
suchte genau, so lange α nicht größer als $2^\circ 44'$ ist.
Beim Gebrauch fünfstelligen Logarithmen kann die Ge-
fahr eines Fehlers von einem Einheit des fünften Decimal-
stelle bis an $8^\circ 38'$ steigen. Die Anwendung der dritten und vier-
ten Formel, bestimmt man durch die dritten Glieder der selben
einen näheren Werth von α und misst diesen dann durch die
Erziehung der vierten Glieder den genaueren Werth.

Um die Seite eines regelmäßigen Polygons zu finden, haben wir folgende allgemeine Gleichungen:

$$0 = x^{n-1} - \frac{(n-2)}{1} x^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2} x^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-7} + \dots$$

wenn n eine gerade Zahl ist, und

$$0 = x^{n-1} - n x^{n-3} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} x^{n-5} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-7} + \dots$$

wenn n eine ungerade Zahl ist, und x bedeutet

die gesuchte Seite, an n gibt die Anzahl der Seiten eines Polygons. ^{Seitenzahl} 0 ist z. B. für das regelmäßige Polygon

von 3 Seiten $x^2 - 3 = 0$
 4 — $x^2 - 2 = 0$
 5 — $x^4 - 5x^2 + 5 = 0$
 6 — $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$
 7 — $x^6 - 7x^4 + 14x^2 - 7 = 0$
 8 — $x^8 - 6x^6 + 10x^4 - 4 = 0$
 9 — $x^8 - 9x^6 + 27x^4 - 30x^2 + 9 = 0$
 10 — $x^8 - 8x^6 + 21x^4 - 20x^2 + 5 = 0$

Die auf der umgekehrten Seite Logarithmen des Sinus und Tangente kleiner Bögen hängen sich aus Folgenden ableiten:

Es ist $\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{2 \cdot 3} + \frac{\alpha^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$ die lässt man die 5. und höhere Potenzen aus weil α sehr klein vorausgesetzt wird so ist $\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{2 \cdot 3} = \alpha (1 - \frac{\alpha^2}{2 \cdot 3})$. Da ferner

$\frac{1}{2} (1 - \frac{\alpha^2}{3}) = 1 - \frac{\alpha^2}{6} + \dots$ so kann man näherungsweise setzen:
 $\sin \alpha = \alpha (1 - \frac{\alpha^2}{6}) = \alpha \cos \alpha$, auf die 2. wird man erst in der 5. Potenz von α einen Fehler von $\frac{\alpha^5}{115}$ begehen.

Es ist also $\log \sin \alpha = \log \alpha + \frac{1}{2} \log \cos \alpha$

und für den Tafel-Halbmeser r , für welchen $\log r = 10$

$\sin \alpha = \frac{\alpha \sqrt{\cos \alpha}}{r}$ also $\log \sin \alpha = \log \alpha - \frac{1}{2} (10 - \log \cos \alpha)$. Wird aber α in Thilen des Halbmesers ausgedrückt, so wird $\log \alpha = \log x + \log r$ und $\log r = 1 = 4.685 \dots$ so hat man den vorigen Ausdruck in (x)

Oben haben wir gesehen, daß der Körperliche Inhalt eines schiefen Parallelepipedes dessen drei in einem und denselben Punkt zusammenlaufende Kanten a, b, c , und der Seitenwinkel $(a, b), (a, c), (b, c)$ oder α, β, γ sine wenn ich diese Körperlichen Inhalt bezeichnen will

$$S = 2abd \sqrt{\sin \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha+\gamma}{2} \sin \frac{\beta+\gamma}{2} \sin \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}}$$

Wenn in dem nämlichen Parallelepipedum u, x, y, z die vier Diagonalen bezeichnen, so werden die Werthe dieser Diagonalen, wenn man bedenkt, daß die drei Seiten bilden die drei Neigungswinkel $\alpha, 180-\beta$ und $180-\gamma$ untereinander,

$$u^2 = a^2 + b^2 + d^2 + 2ab \cos \gamma + 2ad \cos \beta + 2bd \cos \alpha$$

$$x^2 = a^2 + b^2 + d^2 - 2ab \cos \gamma - 2ad \cos \beta + 2bd \cos \alpha$$

$$y^2 = a^2 + b^2 + d^2 - 2ab \cos \gamma + 2ad \cos \beta - 2bd \cos \alpha$$

$$z^2 = a^2 + b^2 + d^2 + 2ab \cos \gamma - 2ad \cos \beta - 2bd \cos \alpha$$

also

$$u^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4d^2$$

d. h. in jedem Parallelepipedum ist die Summe der Quadrate der vier Diagonalen gleich der Summe der Quadrate der 12 Kanten gleich.

Wird eine Pyramide aus E von einem Parallelepipedum abgeschnitten, so wird der Körperliche Inhalt P dieser Pyramide

$$P = \frac{1}{3} abd \sqrt{\sin \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha+\gamma}{2} \sin \frac{\beta+\gamma}{2} \sin \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}}$$

wo a, b, d sind die drei in dem nämlichen Punkt zusammenlaufenden Kanten sind.

(X) Für $\log x$ hat man $\log x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3}}{1 - \frac{x^2}{2}} = \frac{x \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}}{1 - \frac{x^2}{2}} = \frac{x}{(1 - \frac{x^2}{2})^{3/2}}$
 oder für den Halbmesser $r=10$
 $\log x = \frac{x r^3}{(\cos x)^3}$ daher $\log \log x = \log x + \frac{2}{3}(10 - \log \cos x)$ u. s. w.

Um den Flächenraum eines sphärischen Dreiecks zu finden, hat man folgende sehr elegante Ausdrücke in denen a, b, c die Seiten und S die Fläche bedeuten

$$\sin \frac{1}{2} S = \frac{\sqrt{\sin \frac{a+b+c}{2} \sin \frac{a+b-c}{2} \sin \frac{a+c-b}{2} \sin \frac{b+c-a}{2}}}{2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}$$

$$\cos \frac{1}{2} S = \frac{\cos^2 \frac{1}{2} a + \cos^2 \frac{1}{2} b + \cos^2 \frac{1}{2} c - 1}{2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}$$

Diese zwei Ausdrücke geben $\frac{1 - \cos \frac{1}{2} S}{\sin \frac{1}{2} S} = \tan \frac{1}{4} S$

und auf der andern Seite der Zähler läßt sich in das Formel setzen, und wenn man betrachtet, daß z. B.

$$\frac{1 + \cos x}{2 \sin x} = \frac{\sqrt{\sin^2 \frac{1}{2} x}}{2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x} = \sqrt{\frac{1}{2} \tan \frac{1}{2} x}$$

so bekommt man noch einen Ausdruck den man dann leichter verarbeitet

$$\tan \frac{1}{4} S = \sqrt{\frac{1}{4} \tan \frac{a+b+c}{4} \tan \frac{a+b-c}{4} \tan \frac{a+c-b}{4} \tan \frac{b+c-a}{4}}$$

Wenn nur die drei Winkel eines sphärischen Dreiecks gegeben sind, so ist bekannt, daß seine Fläche gleich dem Exzeß über 20° oder wenn die Winkel α, β, γ heißen, eine S wieder die Fläche, so ist

$$S = (\alpha + \beta + \gamma) - 180^\circ$$

Um den sphärischen Exzeß zu bestimmen, verfährt man so: es soll die Fläche eines sphärischen Dreiecks S , die der Kugel F und der Exzeß ε heißen, so ist

$$S = \frac{\varepsilon F}{4 \cdot 180^\circ}, \text{ also } \varepsilon = S \cdot 180^\circ \times \frac{4}{F} = \frac{S}{r^2} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$F = 4\pi r^2 \quad \text{in Minuten } \varepsilon' = \frac{S}{r^2} \cdot \frac{180^\circ \cdot 60}{\pi}$$

$$\text{in Sekunden } \varepsilon'' = \frac{S}{r^2} \cdot \frac{180^\circ \cdot 60 \cdot 60}{\pi} = \frac{S}{r^2} \cdot \frac{180^\circ \cdot 3600}{\pi}$$

Für den Halbmesser r ist aber die Oberfläche der Kugel $F = 4r^2\pi$ also $r = 326660823,5$ toise. $\log S = 7.7137691 + \log E$ toise
 $E = \frac{S}{r^2} \times \frac{180^\circ}{\pi}$
 oder E in Sekunden $= E'' = \frac{S}{r^2} \times \frac{180.60.60''}{\pi}$, da aber r in Sekunden ausgedrückt, der Halbmesser R''
 $= \frac{180.60.60''}{\pi}$ ist, auch

$E'' = R'' \cdot \frac{S}{r^2} = \frac{S}{r^2 \sin 1''}$ $\log E'' = \log R'' + \log S - 2 \log r$
 Hier muß r in derselben Einheit ausgedrückt werden, in welcher die Seiten des Dreiecks, für die Bestimmung von S genommen wurden.

Ist r Halbmesser eines Kreises, so ist der Inhalt

des eingeschriebenen Dreiecks $= \frac{3r^2\sqrt{3}}{4} = 1.299038... r^2$
 des umbeschriebenen $= 3r^2\sqrt{3} = 3.196152... r^2$
 des eingeschriebenen Vierecks $= 2r^2$
 des umbeschriebenen $= 4r^2$
 des eingeschriebenen Fünfecks $= \frac{5}{8}r^2\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 2.377641... r^2$
 des umbeschriebenen $= 5r^2\sqrt{5-2\sqrt{5}} = 3.632713... r^2$
 des eingeschriebenen Sechsecks $= \frac{3r^2\sqrt{3}}{2} = 2.598076... r^2$
 des umbeschriebenen $= 2r^2\sqrt{3} = 3.464102... r^2$
 des eingeschriebenen Achtecks $= 2r^2\sqrt{2} = 2.828427... r^2$
 des umbeschriebenen $= 8r^2(\sqrt{2}-1) = 3.313709... r^2$
 des eingeschriebenen Zehnecks $= \frac{5}{4}r^2\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 2.938926... r^2$
 des umbeschriebenen $= 2r^2\sqrt{25-10\sqrt{5}} = 3.249197... r^2$

Für annähernde Berechnung des Verhältnisses des Durchmessers zum Umkreisse, hat man folgender allgem. meine Formeln. Es sey A der Inhalt eines eingeschriebenen und B der Inhalt eines umbeschriebenen Vierecks

von n Seiten; ferner A' der Inhalt des inbe-
schriebenen, und B' der Inhalt des umbe-
schriebenen Vielecks von $2n$ Seiten, so ist $A' = \sqrt{AB}$
und $B' = \frac{2AB}{A+A'}$ ietzt man den Halbmesser $= 1$
so läßt sich leicht, von dem Inhalte des
Vielecks ausgehend, das erwähnte Verhältniß
finden

Berechnung der fünf regelmäßigen Körper
Ist r der vom dem Halbmesser des um den
Körper beschriebenen Kugel, so ist
der Inhalt des Tetraëders von gleichem Dreieck
 $= \frac{1}{6} r^3 \sqrt{3}$

und die ganze Oberfläche des Tetraëders $= \frac{2}{3} r^2 \sqrt{3}$
Jeden regelmäßigen Körper kann man
sich in so viele Pyramiden zer schneiden
denken, als er Flächen hat. Diese Pyramiden
laufen mit ihren Spitzen im Mittelpunkte des
Körpers oder auch im Mittelpunkte der Kugel, in
der er enthalten ist, zusammen. Die Berechnung
dieser Körper hängt also von der Berechnung
einer dieser Pyramiden ab.

Im Tetraëder ist die Höhe jeder der vier Pyramiden
 $= \sqrt{\frac{1}{4} r^2 - (\frac{1}{3} a \sqrt{2})^2} = \frac{1}{6} r$ also der Inhalt einer der
vier Pyramiden ist $= \frac{1}{6} r^3 \sqrt{3} \times \frac{1}{18} r = \frac{1}{36} r^4 \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{108} r^4 \sqrt{3}$
und $\frac{1}{9} r^3 \sqrt{3} = \frac{1}{27} r^3 \sqrt{3} = 0.06415001... r^3$ der
Inhalt des Tetraëders.

Die Seite eines Tetraëders $= \frac{1}{3} r^2 \sqrt{6}$

Im Octäeder. Die Seite des Octäeders $= \frac{1}{2} r \sqrt{2}$ 14

Legt man eine Ebene durch vier Punkte des Octäeders, so schneidet diese dieselbe in 2 vierseitige Pyramiden deren Grundfläche $= \frac{1}{2} r \sqrt{2} \times \frac{1}{2} r \sqrt{2} = \frac{1}{2} r^2$ und deren Höhe $= \frac{1}{2} r$. Ihr Inhalt ist also $\frac{1}{2} r^2 \times \frac{1}{2} r = \frac{1}{12} r^3$ und der Inhalt beider oder der Inhalt des Octäeders ist $= \frac{1}{6} r^3$.

Im Hexäeder. Die Seite des Hexäeders $= \frac{1}{3} r \sqrt{3}$ und sein Inhalt $= \left(\frac{1}{3} r \sqrt{3}\right)^3 \frac{1}{27} r^3 \sqrt{27} = \frac{1}{9} r^3 \sqrt{3} = 0.1924501... r^3$

Im Dodecaeder. Die Seite des Dodecaeders $= \frac{1}{6} r (\sqrt{5} - \sqrt{3})$

Ist r der Durchmesser eines Kreises, so ist die Seite eines in denselben beschriebenen Fünfecks $= r \sqrt{\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}} = \frac{1}{4} r \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

also der Inhalt des von 2 Halbmessern und der Seite des Fünfecks gebildeten Dreiecks $= r^2 \sqrt{\frac{1}{288} - \frac{1}{1440} \sqrt{5}}$

und der Inhalt des Fünfecks $= r^2 \sqrt{\frac{25}{288} - \frac{5}{288} \sqrt{5}}$

und die Oberfläche des Dodecaeders $= r^2 \sqrt{\frac{25}{2} - \frac{5}{2} \sqrt{5}}$

Die senkrechte Höhe eines der 12 Pyramiden des Dodecaeders bildet mit dem Halbmesser der Kugel, in der jener Körper enthalten ist und mit dem Halbmesser des Kreises in dem das Fünfeck beschrieben ist, ein rechtwinkliges Dreieck. Es ist also diese Höhe $= \sqrt{\left\{ \frac{1}{4} r^2 - r^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{30} \sqrt{5} \right) \right\}}$ deren Drittel $= r \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{30} \sqrt{5}}$

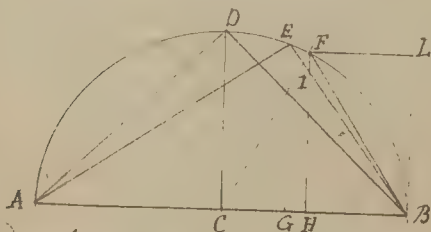
und mit der Oberfläche des Dodecaeders multipliziert gibt für den Inhalt des Dodecaeders

$$r^3 \sqrt{\frac{5}{216} + \frac{5}{216} \sqrt{5}} = \frac{1}{36} r^3 \sqrt{90 + 30 \sqrt{5}} = 0.3481458... r^3$$

Im Icosaeder. Die Seite des Icosaeders $= r \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{10} \sqrt{5}}$

also nach dem, was man beim Tetraeder gefunden hat, ist der Inhalt eines Icosaeders $= r^2 \sqrt{\frac{9}{160} - \frac{3}{160} \sqrt{5}}$

Eben so wie beim Tetraëder ist die Höhe einer der
 26 Pyramiden des Dosaëders $v = V\left\{\frac{1}{4}r^2 - r^2\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{30}V_3\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$
 $= r\sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{30}V_3}$, also der Inhalt dieser Pyramide
 $= r^3\sqrt{\frac{1}{5760} + \frac{1}{28800}V_3}$ und der Inhalt der ganzen
 Dosaëders $= r^3\sqrt{\frac{5}{72} + \frac{1}{72}V_3} = \frac{1}{12}r^3\sqrt{10+2V_3} =$
 $= 0.3170188387650512... r^3 \text{ K}$



Sei AB der Durchmesser der gegebenen Kugel, deren Mittel-
 punkt C, theilt man ihn so, daß $AG = 2GB$ und $BK = AB$ senk-
 recht auf AB. Man ziehe CK , BF und ziehe die Senkrechte FI ,
 Ferner legen die Linien CD , GE senkrecht auf AB und ent-
 lich sey die Linie BE in I nach folgender Proportion getheilt
 so daß $BE : BI = BI : IE$. Nach diesen Voraussetzungen
 ist nach Eucleds Elementen 13. B. 18. Satz AE die Seite des
 Tetraëders — BD die Seite des Octaëders — BE die Seite
 des Hexaëders, BF die Seite des Dosaëders, und BI die
 Seite des Dodecaëders.

Aufgabe Es soll eine bequeme Formel für den ¹⁵en
Inhalt einer mit der Grundfläche parallel
abgeschnittenen Pyramide gefunden werden. —

Es sey die kleinere Grundfläche p die größere P , die
entzogene Höhe a und die Höhe der ergänzten Py-
ramide x , so ist die Höhe der ergänzten Spitze $= x - a$
also, da bei den ähnlichen Körpern sich die gleichnamigen
Flächen wie die ^{Quadrate der} Seiten verhalten,
 $p : P = (x-a)^2 : x^2$ und $x = \frac{a\sqrt{P}}{\sqrt{P}-\sqrt{p}}$; $x-a = \frac{a\sqrt{p}}{\sqrt{P}-\sqrt{p}}$

Es ist demnach der Inhalt der ganzen oder der ergänzten
Pyramide $= \frac{\frac{1}{3}aP\sqrt{P}}{\sqrt{P}-\sqrt{p}}$, und der Inhalt der Spitze

$$= \frac{\frac{1}{3}ap\sqrt{p}}{\sqrt{P}-\sqrt{p}}; \text{ folglich der Inhalt der}$$

abgeschnittenen Pyramide $= \frac{1}{3}a(P+p+\sqrt{Pp})$.

Diese Formel gibt auch den Inhalt eines abgeschnittenen
Kegels. Ist bei einem solchen Kegel außer der Höhe

a , der Halbmesser der kleineren Grundfläche $= r$, und
der größeren $= R$ gegeben; so ist sein Inhalt

$$= \frac{1}{3}a\pi(R^2 + r^2 + Rx) \quad \text{oder} \quad = \frac{1}{4}a\pi(R+r)^2 + \frac{1}{2}a\pi Rr$$

Seine ganze Oberfläche

$$= \pi(R+r)(R-r+a)$$

wenn a die Länge der krummen Fläche bedeutet, und
der Inhalt der krummen Fläche $= a\pi(R+r)$. —

Ist a die Höhe eines Kegels und r der Halbmesser
seiner Grundfläche, so ist sein Inhalt $= \frac{1}{3}ar^2\pi$.

Seine krumme Seitenfläche deren Länge a so groß soll, ist
 $= ar\pi$ und seine ganze Oberfläche $= r\pi(a+r)$. —

Der Inhalt eines Zylinders, dessen Halbmesser $= r$, und dessen
Höhe $= a$, ist $= ar^2\pi$, und seine Oberfläche $= 2r\pi(a+r)$.

Aus zwei Seiten und eines eingeschlossenen Winkels eines geradlinigen Dreiecks die dritte Seite zu finden. nimmt man gewöhnlich die Formeln

$$\lg x = \frac{2ab \sin \frac{1}{2} \gamma}{a-b} \text{ und } c = \frac{a-b}{\cos \frac{1}{2} \gamma}$$

wenn die zwei Seiten a, b mit dem eingeschlossenen Winkel γ gegeben sind und c die gesuchte Seite ist. Diese Formeln erhält man aus der Gleichung

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \\ &= a^2 + b^2 - 2ab(1 - 2\sin^2 \frac{1}{2} \gamma) \\ &= (a-b)^2 + 4ab \sin^2 \frac{1}{2} \gamma \end{aligned}$$

$$\text{also } \left(\frac{c}{a-b} \right)^2 = 1 + \frac{4ab \sin^2 \frac{1}{2} \gamma}{(a-b)^2}$$

$$\text{setzt man } \lg x = \frac{4ab \sin^2 \frac{1}{2} \gamma}{(a-b)^2}$$

so erhält man obige Formeln.

Man kann aber folgende Formeln anwenden, die mehr Bequemlichkeit darbieten. Nennt man φ die Differenz der gegebenen Winkel, so wissen wir daß $\lg \varphi = \frac{a-b}{a+b} \lg \frac{1}{2} \gamma$

$$\text{Aus der Gleichung } c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma} \text{ erhält man } c = (a-b) \cos \frac{1}{2} \gamma \sqrt{1 + \left(\frac{a+b}{a-b} \right)^2 \lg^2 \frac{1}{2} \gamma}$$

indem man a^2 und b^2 mit $\cos^2 \frac{1}{2} \gamma + \sin^2 \frac{1}{2} \gamma$ jedes die $\frac{1}{2}$ teils multipliziert und statt $\cos \gamma$, $\cos^2 \frac{1}{2} \gamma - \sin^2 \frac{1}{2} \gamma$ einführt. — Führt man nun in die letzte Gleichung den Halfwinkel φ ein, so bekommt man

$$c = \frac{(a-b) \cos \frac{1}{2} \gamma}{\sin \varphi}$$

$$\text{oder } c = \frac{(a+b) \sin \frac{1}{2} \gamma}{\tan \varphi}$$

Formeln aus der analytischen Geometrie

Die Linien in der Ebene betrachtet

$x=a$
 $y=b$ sind die Gleichungen eines Punktes in der Axe x

$x=a$
 $y=b$

$x=a$
 $y=b$

$x=a$
 $y=b$

des Anfangspunktes

eines Punktes überhaupt

$y=ax+b$ ist die Gleichung einer Linie wo a die Tangente des mit der Axe x Winkel, und b die Entfernung des Durchschnittspunktes dieser Linie mit der y von Anfangspunkte bedeutet.

$y=ax+b$
 $y'=a'x+b'$ sind die Gleichungen der durch 2 Punkte gehenden Linie

$(x-x')^2 + (y-y')^2 = r^2$ ist die Länge der Linie die 2 Punkte verbindet

$y=b + \frac{x \sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)}$ diese Gleichung ist die allgemeinste der gegebenen Linien; α ist der Winkel der die Linie mit der Axe x , und β den die Coordinaten-Axen unter sich bilden

$x=a$
 $y=b$ jede dieser Gleichungen für sich betrachtet, gehören die erster der Axe y und die andere der der Axe x parallelen Linie

$y-y'=a(x-x')$ ist die Gleichung der durch den Pkt x', y' gehenden Linie

$y-y' = \frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x')$ Gleichung der durch 2 Pkte x', y', x'', y'' gehenden Linie

$y=ax+b$
 $y=a'x+b'$ Gleichungen der zwei Linien sind diese Linien parallel so ist $a=a'$ sind sie aufeinander senkrecht $1+aa'=0$

also senkrecht a so ist $-\frac{1}{a}$ $1+aa'=0$

Die Koordinaten des Durchschnittspunktes ξ und η nimmt man ξ und η an

$$\xi = \frac{b' - b}{a - a'} \quad \eta = \frac{ab' - a'b}{a - a'}$$

$y - y' = \frac{x' - x}{a}$ ist die Gleichung der durch den Pkt x', y' auf die gegebene Gerade senkrechten Linie

$\frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1+a^2}}$ ist der Ausdruck des Loses zwischen dem Pkt x', y' und der gegebenen Linie

2. Die geraden Linien im Raume

$$\begin{cases} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{cases} \text{ die Linie I}$$

$$\begin{cases} x = a'z + \alpha' \\ y = b'z + \beta' \end{cases} \text{ die Linie II}$$

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = c \end{cases}$$

sind Gleichungen eines Punktes, die man erhält, wenn man sich betrachtet, gehört der Projection eines Punktes in der Ebene xy , oder auch, die sind die Gleichungen einer Linie, die mit der z -Achse parallel ist. — Jede der drei Gleichungen für sich allein betrachtet, gehört einer Ebene, die mit der Coordinaten-Ebenen respective parallel ist, namentlich:

$$\begin{aligned} x = a & \text{ der mit } xy \text{ parallelen Ebene} \\ y = b & \text{ der mit } xz \text{ parallelen Ebene} \\ z = c & \text{ der mit } xy \text{ parallelen Ebene} \end{aligned}$$

$x = 0$ Gleichungen der yz -Ebene und so von anderen Ebenen

$x = 0$ Gleichung der Ebene yz

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = az + \alpha \end{cases} \text{ Gleichungen einer Linie in der Ebene } xz$$

W. m. der Winkel des Igerade mit der Ebene xy
 n - - - - - xz
 p - - - - - yz

so gilt

$$\sin m = \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$$

$$\sin n = \frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$$

$$\sin p = \frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$$

Ebenen

$$\begin{cases} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{cases} \text{ Linie } \text{ und } \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases} \begin{cases} \text{ Ebene I} \\ \text{ II} \end{cases}$$

Die Ebene I ist $+ \frac{A}{x}$

$-\frac{A}{C}$ die Tang. des Winkels der Normalenlinie in xy mit x

$$\begin{array}{rcl} \frac{B}{C} & & yz = y \\ \frac{A}{B} & & xy = x \end{array}$$

Die Entfernung des Anfangspunktes von der Mte wo die Ebene I schneidet die Axe der x ist $= -\frac{D}{A}$

$$\begin{array}{rcl} y & = & -\frac{D}{B} \\ z & = & -\frac{D}{C} \end{array}$$

Die Gleichungen der Normalenlinie

$$\begin{array}{rcl} \text{in } xz & \text{ sind } & y=0, \quad Ax + Cz + D = 0 \\ yz & & x=0, \quad Cz + By + D = 0 \\ xy & & z=0, \quad Ax + By + D = 0 \end{array}$$

Eliminiert man zwischen zwei Ebenen die Größe z so erhält man die Projektionen ihres Durchschnitts in xy

$Cx + Ay + B = 0$ die Ebene flucht senkrecht auf xy

$$Cx + Az + B = c \quad - - -$$

$$C_1 + 12 + B = 0 \quad - \quad 12$$

$A = aC$ } \forall die Bedingung dass die Ebenen I auf der
 $B = bC$ Linie I zusammenfallen

$A + B + C = 0$ die Gerade I ist B & C bzw. I parallel

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ A+B+2C=0 \end{cases} \text{ in } K \text{ or } I \text{ high, par in } \mathcal{O}_K \text{ or } I.$$

$$x + 1.3 + 2 = 0 \quad \text{the second line}$$

D ist die Größe des Lotkes von Anfangszustahl
auf die Ebene I, und die Coordinaten
des Schwerpunktes dieses Lotkes mit der
Ebene I sind

$$\frac{z}{s} = -\frac{1}{s^2 + B_4 C^2}, \quad z' = -\frac{B_4}{s^2 + B_4 C^2}, \quad z'' = -\frac{C^2}{s^2 + B_4 C^2}$$

und die Gleichungen des Lottes aus dem Aufhängepunkte
 $\frac{1}{2} g t^2 = x l = z A, \quad y l = z B$

$\frac{1}{2}$ w des Winkel des Linsen I^{ste} mit der Ebene L ,

$$\sin \omega = \frac{a + b\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{\sqrt{1 + a^2 + b^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

4. Geraden der Ebene I mit der Ebene II

18 - - - - - at 2
- - - - - 4/2

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}}}$$

$$\cos \gamma = \frac{.4}{\sqrt{.4^2 + .3^2 + .5^2}}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Es sei ω der Winkel zw. die zwei Ebenen I u II an sich bildend, so ist

$$\cos \omega = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

sind diese Ebenen auf einander senkrecht, so ist

$$AA' + BB' + CC' = 0$$

sind sie parallel, so ist

$$\frac{A}{C} = \frac{A'}{C'}, \quad \frac{B}{C} = \frac{B'}{C'}$$

Gehet die Ebene I durch die Pkte $x'y'z'$, $x''y''z''$, $x'''y'''z'''$

$$\begin{aligned} \text{so ist: } & Ax + By + Cz + D = 0 \\ & Ax' + By' + Cz' + D = 0 \\ & Ax'' + By'' + Cz'' + D = 0 \\ & Ax''' + By''' + Cz''' + D = 0 \end{aligned}$$

$$A = y'(z'' - z''') - y''(z' - z''') + y'''(z' - z'')$$

$$B = z'(x'' - x''') - z''(x' - x''') + z'''(x' - x'')$$

$$C = x'(y'' - y''') - x''(y' - y''') + x'''(y' - y'')$$

$$D = x'(y''z''' - y'''z'') - x''(y'z''' - y'''z') + x'''(y'z'' - y''z')$$

Es dann T die Fläche des Dreiecks zwischen den Punkten und t deren Projektion in xy .

$$\frac{t'}{t} = \frac{xz}{yz}$$

$$\text{so ist } A = 2t, \quad B = 2t', \quad C = 2t''$$

$$t = ATP, \quad t' = BTP, \quad t'' = CTP \text{ wo } P = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{2(A^2 + B^2 + C^2)}$$

$$\text{und } t^2 = t'^2 + t''^2$$

Wird $\frac{D}{P} = \frac{D}{P}$ der körperliche Inhalt der Pyramide in Bezug auf T und dessen Spitze, der Anfangspunkt der Koordinaten ist.

Kegel (Schnitte)

1. Kreis, sey r der Halbmesser und $d=2r$.

Peripherie des Kreises $2\pi r$ ($\pi=180^\circ$)

Fläche πr^2

Fläche eines Sektors von n Grad $\frac{n}{360} \pi r^2$

Fläche eines Segmentes von n Grad $= r^2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{n\pi}{180} - \sin n \right)$

Oberfläche der Kugel $4\pi r^2$

Volumen des Kugels $= \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{1}{6} d^3 \pi$

Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte ist:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Für die Ellipse ist immer $B^2 - 4AC < 0$ oder negative.

Für den Kreis ist $A=C$ und $B=0$. Die Coordinaten des Mittelpunktes sind $-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}$, und der Halbmesser $= \sqrt{\frac{D^2 + E^2}{4A} - F}$.

Für die Parabel ist $B^2 - 4AC = 0$, oder was dasselbe ist die drei ersten Glieder, $Ax^2 + Bxy + Cy^2$, bilden ein vollständiges Quadrat.

Für die Hyperbel ist $B^2 - 4AC > 0$ oder positive.

Die allgemeine Gleichung der Tangente zu irgend einem Punkte der zweiten Ordnung, ist

$$y - y' = -\frac{By' + 2Cx + E}{Bx' + 2Ay + D} (x - x') \text{ wo } x', y' \text{ sind Coordinaten des Berührungspunktes}$$

Fläche einer Ellipse $\pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$
 e Excentricität

Krumme Linien

Parabel $y^2 = px$
 Ellipse $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$
 Hyperbel $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$

Allgemeine Gleichung der Kreis-Schneidung
 Polar-Coordinationen ist

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \omega}$$

für Parabel ist $\varepsilon = 1$
 Ellipse $\varepsilon < 1$
 Hyperbel $\varepsilon > 1$

wo ω wahre Anomalie ist
 Perihel, r Radius vector
 a halbe große Axe
 ε Excentricität
 p halber Parameter
 q Differenz der Perihel

Neil Parabel $y^2 = ax^2$

Tractoria $\frac{y}{x} = \frac{a}{b} \sqrt{a^2 - y^2} \quad | \quad x = \sqrt{a^2 - y^2} - a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$

Quadratica Diostrophica $y = x \log \frac{\pi x}{2r} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{wo } a = \frac{y}{\cos \omega} = \text{radius} \\ \text{constant tangente} \end{array} \right.$

Logarithmica $y = e^{\frac{x}{m}} \quad \text{wo } m \text{ modulus}$

Spiralis Parabolica $r^2 \phi = 2\pi(z - r)^2$

Lissoide Diostrophica $y^3 + yx^2 = 2ax^2$

Spiralis Archimedi $2\pi z = r \phi$

Conchoide Nicomechi $(x^2 + y^2)(x - a)^2 = b^2 x^2$

Logistica $\frac{x}{b} = m \log \frac{y}{a}$

Spiralis Hyperbolica $z(x + y) = ax$

Kettenlinie $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad | \quad y = a \log \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}$

Cycloide $\frac{dx}{dy} = \frac{a}{\sqrt{2ay - y^2}} \quad | \quad a \text{ ist der Halbmesser}$

Die letzte Gleichung leitet man aus der ursprünglichen Gleichung der Cycloide ab folgender ist

$x = \text{Arc sin vers. } y - \sqrt{2ay - y^2} \quad \text{und } \text{Arc} = \sqrt{ax^2 + y^2}$

t Zeit seit dem Durchgang durchs Perihel ⁴⁰

$$K = 0.0172021$$

e ... excentrische Anomalie

m ... mittlere Anomalie vom Perihel

Parabel

$$r = \frac{p}{2 \cos^2 \frac{\omega}{2}} \quad | \quad \frac{2Kt}{p^{\frac{3}{2}}} = \lg \frac{\omega}{2} + \frac{1}{3} \lg^3 \frac{\omega}{2} \quad \text{oder} \quad (0.9122791) t \bar{q}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \lg \frac{\omega}{2} + \frac{1}{3} \lg^3 \frac{\omega}{2}$$

wo $(0.9122791) \bar{q}^{\frac{3}{2}}$ die mittlere tägliche Bewegung ist,
und q Entfernung des Perihels.

Ellipse

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \omega} = \frac{q(1+e)}{1 + e \cos \omega} = \frac{a(1-e^2)}{1 + e \cos \omega} \quad | \quad \cos e = \frac{e + \cos \omega}{1 + e \cos \omega} \quad | \quad \lg \frac{e}{2} = \lg \frac{\omega}{2} \lg \frac{90-\varphi}{2}$$

$$\text{und } \frac{Kt}{a^{\frac{3}{2}}} = e - e \cos e = m$$

$$\text{wo } \sin \varphi = e, \quad \lg \frac{90-\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

$$r = a(1 - e \cos e) = \frac{a \cos \varphi \sin e}{\sin \omega}$$

Hyperbel

$$\cos \psi = \frac{1}{e}, \quad p = q(e+1) = a(e^2-1)$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \omega} \quad | \quad \cos e = \frac{1 + e \cos \omega}{e + \cos \omega} \quad | \quad \lg \frac{e}{2} = \lg \frac{\omega}{2} \lg \frac{\varphi}{2}$$

$$\frac{Kt}{a^{\frac{3}{2}}} = e \lg e - 2.30258509 \lg \text{brigg. } \lg \frac{90+e}{2}$$

Länge!

$$dm = \frac{r' d\omega}{a^2 \cos^2 \varphi} = \frac{r(a+r-ae^2) \sin \omega \cdot d\varphi}{a^2 \cos^2 \varphi}$$

$$dr = \frac{r da}{a} + a \lg \varphi \sin \omega dm - a \cos \varphi \cos \omega d\varphi - ee = \sin \varphi$$

Fläche eines Sectors = $\frac{1}{2} K (t-t') Vp$ wo $(t-t')$ die Zwischenzeit ist.

$$\frac{e}{2} = \frac{\omega}{2} - b \sin \omega + \frac{b^2}{2} \sin 2\omega - \frac{b^3}{3} \sin 3\omega + \dots \quad | \quad b = \frac{e}{1 + \sqrt{1-e^2}}$$

$$\lg \frac{\omega}{2} = \frac{e}{2} + b \sin e + \frac{b^2}{2} \sin 2e + \frac{b^3}{3} \sin 3e + \dots$$

$$w = \omega - 2\varepsilon \sin \omega + 2b(\varepsilon - \frac{b}{2}) \sin 2\omega - 2b^2(\varepsilon - \frac{2b}{3}) \sin 3\omega + 2b^3(\varepsilon - \frac{3b}{4}) \sin 4\omega$$

$$e = m + \varepsilon \sin m + \frac{\varepsilon^2}{1 \cdot 2 \cdot 2} \cdot 2 \sin 2m + \frac{\varepsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} (3 \sin 3m - 3 \sin m) +$$

$$+ \frac{\varepsilon^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^3} (4^3 \sin 4m - 4 \cdot 2^3 \sin 2m)$$

$$\omega = m + (2\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{4} + \frac{5\varepsilon^5}{2^5 \cdot 3}) \sin m + (\frac{\varepsilon}{4} \varepsilon^2 - \frac{11\varepsilon^4}{2^3 \cdot 3}) \sin 2m +$$

$$+ (\frac{13}{2^2 \cdot 3} \varepsilon^3 - \frac{43\varepsilon^5}{2^5 \cdot 3} \sin 3m + \frac{103\varepsilon^4}{2^5 \cdot 3} \sin 4m + \frac{1097}{2^6 \cdot 3 \cdot 5} \sin 5m)$$

$$\frac{r}{a} = 1 - \varepsilon \cos m - \frac{\varepsilon^2}{1 \cdot 2} (\cos 2m - 1) - \frac{\varepsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 2} (3 \cos 3m - 3 \cos m) -$$

$$- \frac{\varepsilon^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^3} (4^3 \cos 4m - 4 \cdot 2^3 \cos m) \dots$$

Gibt X die größte Mittelwertgleichung, so ist

$$X = 2\varepsilon + \frac{11}{48} \varepsilon^3 + \frac{599}{5120} \varepsilon^5 + \dots \text{ und } 2\varepsilon = X - \frac{11X^3}{8 \cdot 2^7} - \frac{5 \cdot 87}{3 \cdot 8 \cdot 2^{15}} X^5$$

$$\partial \omega = \frac{a^2 \cos \varphi}{r^2} dm + \frac{(2 + \varepsilon \cos \omega) \sin \omega}{\cos \varphi} \cdot \partial \varphi$$

$$\partial e = \frac{a}{r} dm = \frac{r \partial \omega}{a \cos \varphi} = \frac{\partial r}{a \varepsilon \sin e}$$

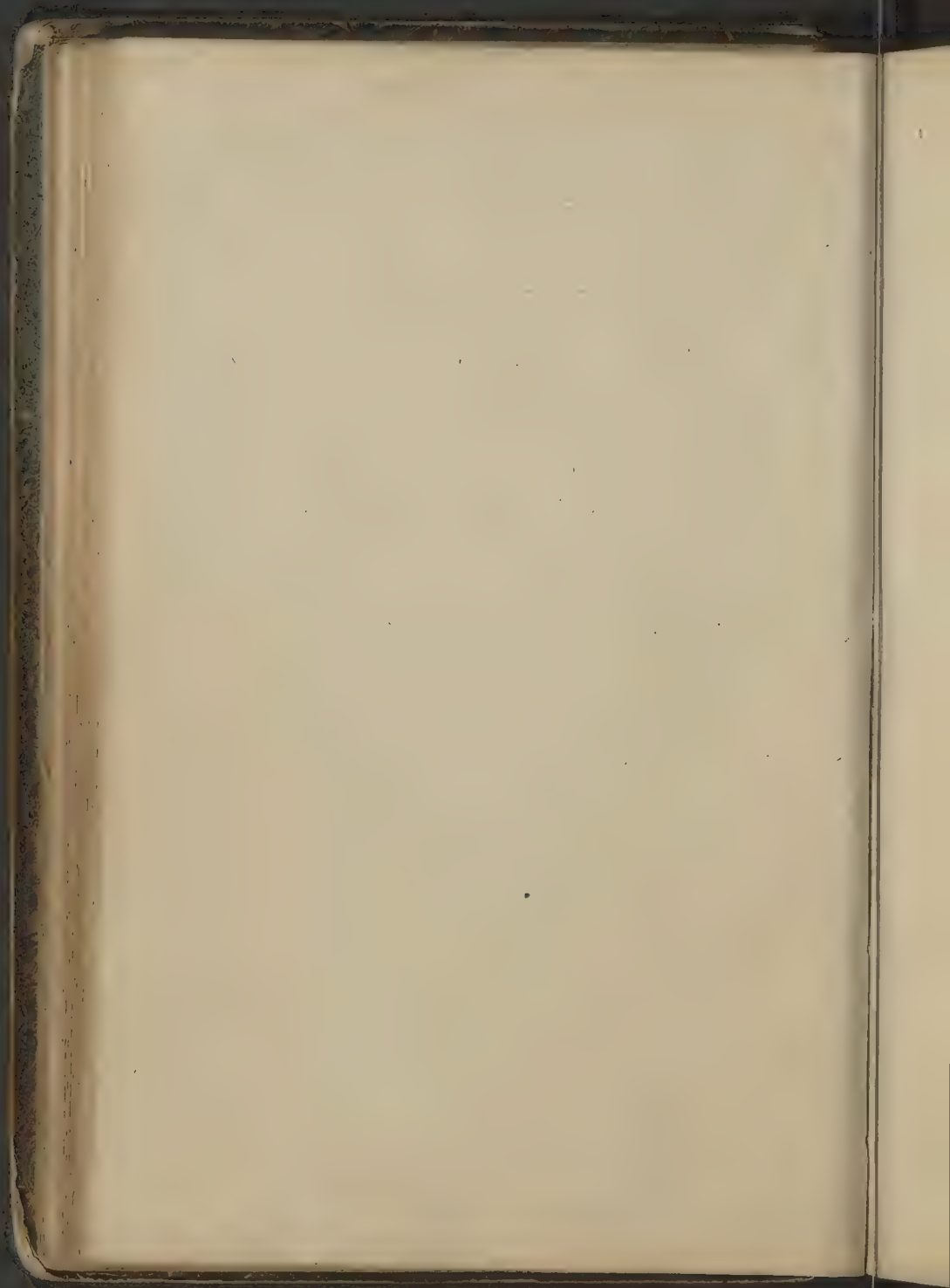
36/10/14

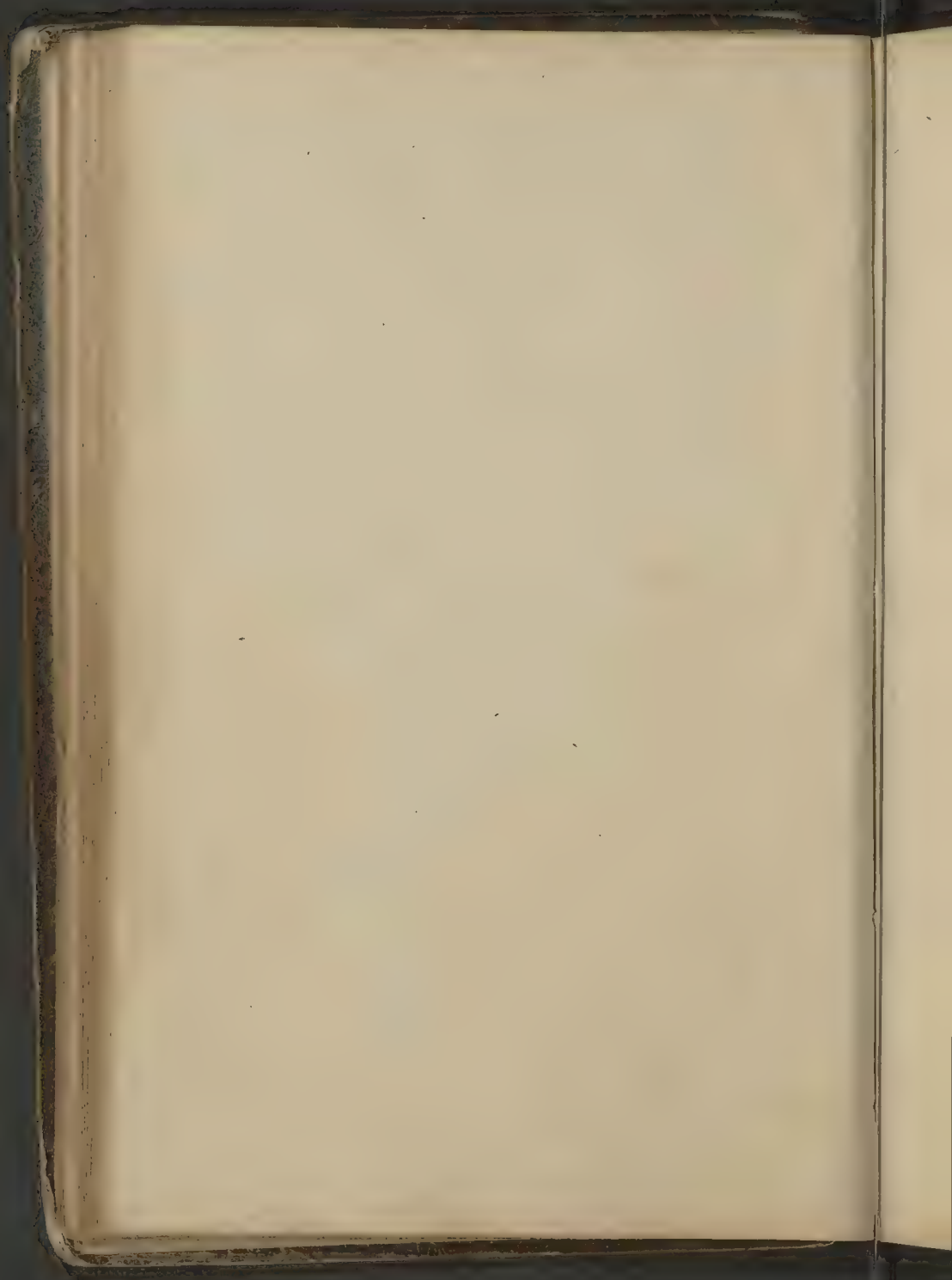
+

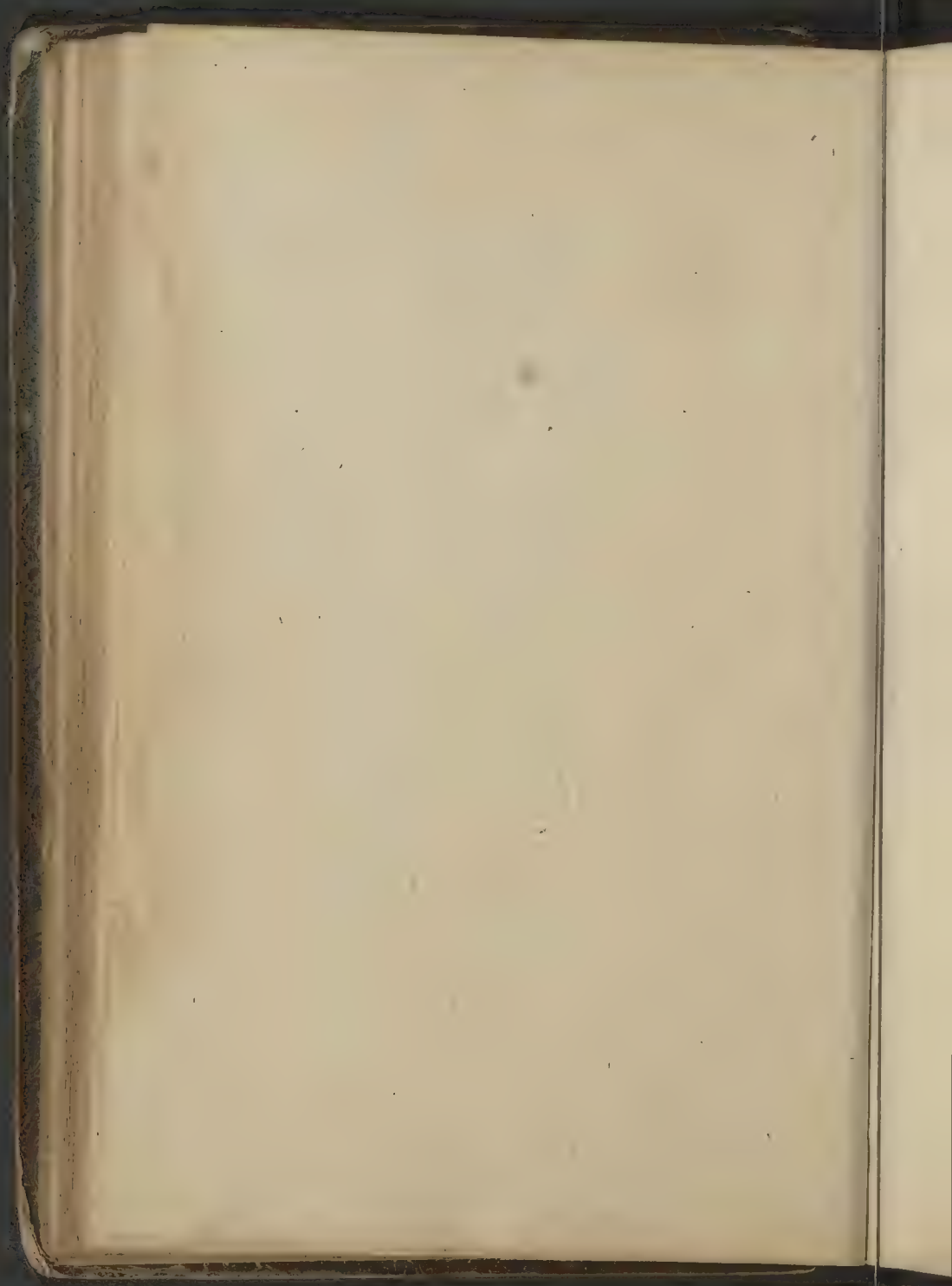
1897 1.
3.5 vms

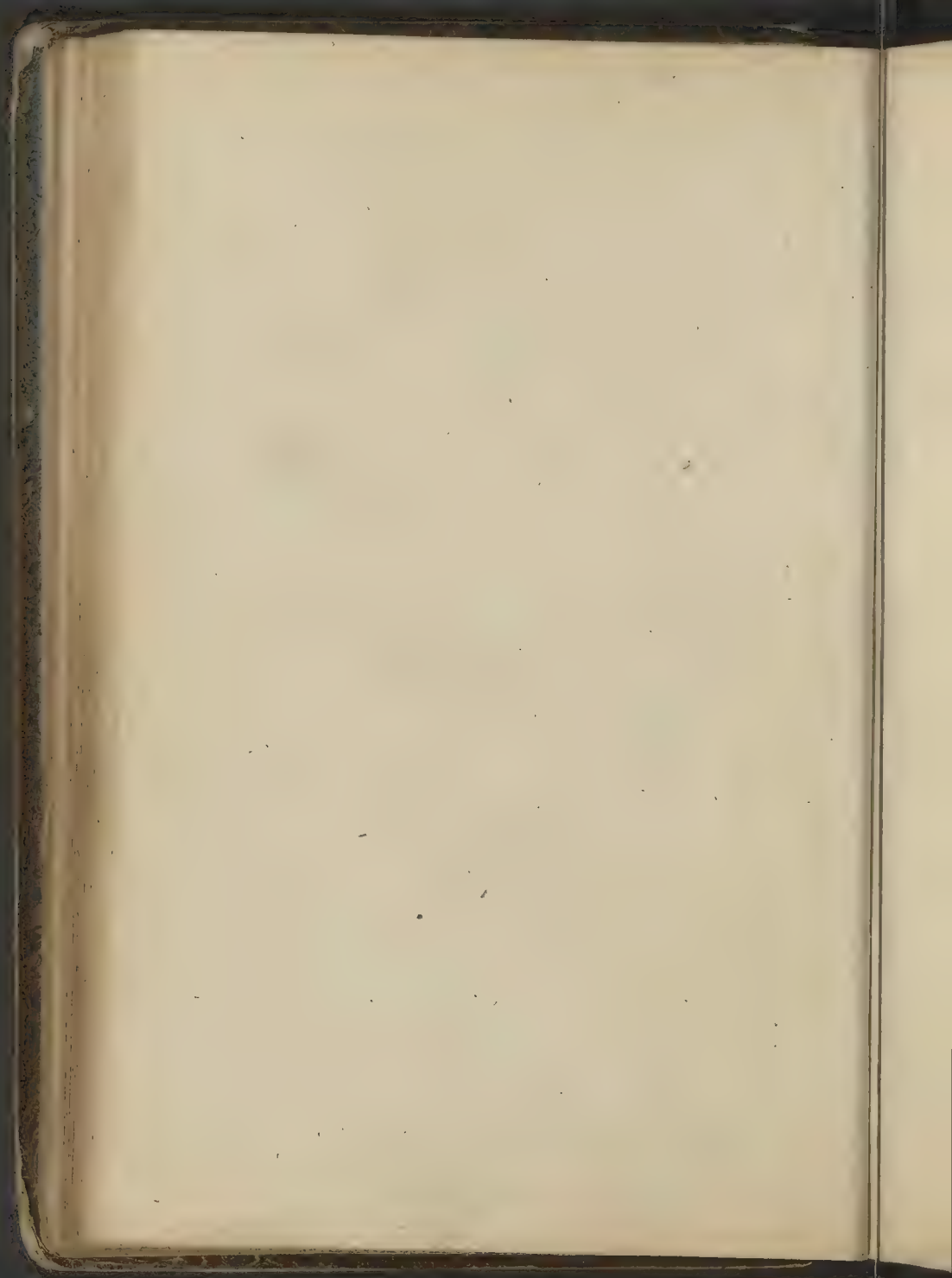
1/4

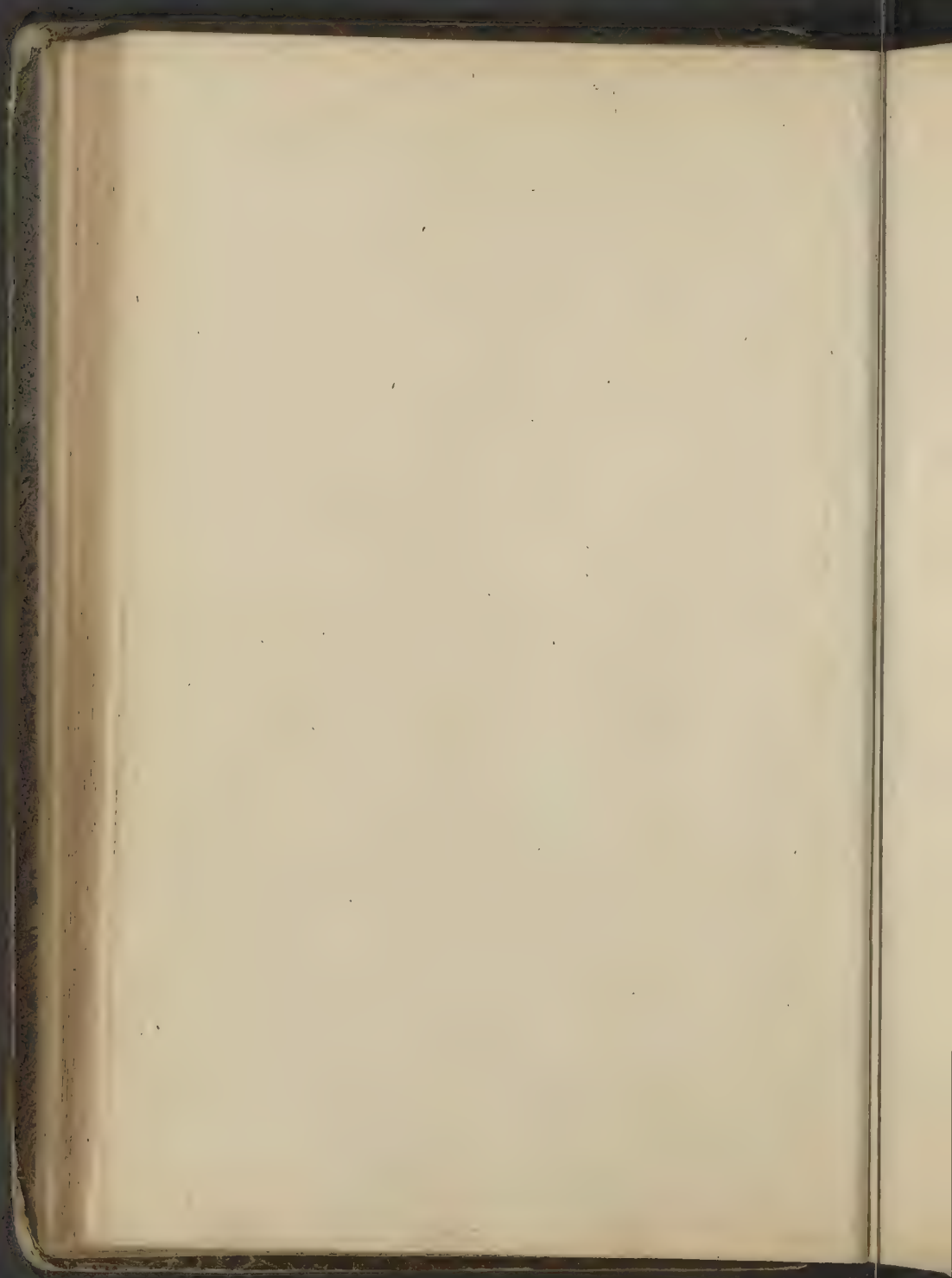
1897 1.
2.5 vms

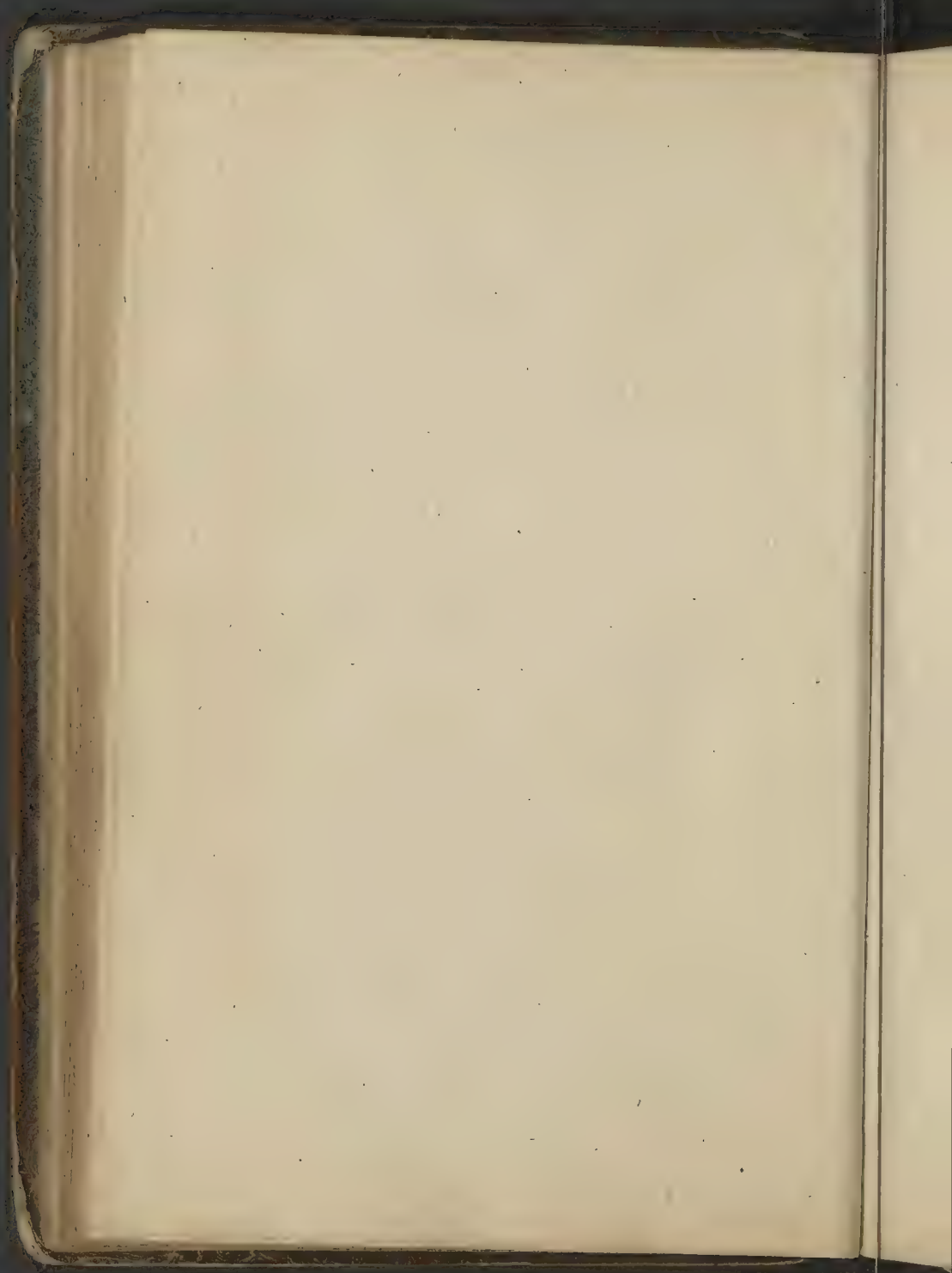












$$y = a$$

$$y = a'$$

Paula

$$y = f$$

$$y =$$

Winn

$$y = a$$

$$y = b$$

$$y = f$$

$$y = c$$

$$y = v$$

$$y = v$$

$$y = b$$

Winn

Winn

Winn

Winn

$$y =$$

$$y =$$

$$y =$$

$$y =$$

Differentialrechnung.

28

$$y = ax \quad \dots \quad dy = a dx \quad \dots \quad \frac{dy}{dx} = a$$

$$y = a^x \quad \dots \quad dy = a^x \log a dx \quad \left| \frac{d \log x = \frac{dx}{x}}{\frac{d \log x = m \cdot \frac{dx}{x}} \right|$$

Taylor'sche Reihe ist folgend:

$y = f(x)$, wenn x in $x+h$ übergeht, so ist

$$y' = y + \frac{dy}{dx} \frac{h}{1} + \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{h^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^3 y}{dx^3} \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{d^4 y}{dx^4} \frac{h^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

Wenn s im ~~Kreis~~ Bogen ist, so hat man

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + p^2}, \text{ wenn } p = \frac{dy}{dx}$$

$$y = \sin x \quad \dots \quad dy = dx \cos x \quad d \sin^2 x = +2 dx \sin x \cos x$$

$$y = \cos x \quad \dots \quad dy = -dx \sin x \quad d \cos^2 x = -2 dx \sin x \cos x$$

$$y = \tan x \quad \dots \quad dy = \frac{dx}{\cos^2 x} \quad d \tan^2 x = \frac{2 dx \tan x}{\cos^2 x}$$

$$y = \cot x \quad \dots \quad dy = -\frac{dx}{\sin^2 x} \quad d \cot^2 x = -\frac{2 dx \cot x}{\sin^2 x}$$

$$y = \sec x \quad \dots \quad dy = \frac{dx \sin x}{\cos^3 x} \quad d \sec^2 x = \frac{2 dx \sec x \sin x}{\cos^3 x}$$

$$y = \csc x \quad \dots \quad dy = -\frac{dx \cos x}{\sin^3 x} \quad d \csc^2 x = -\frac{2 dx \csc x \cos x}{\sin^3 x}$$

$$y = \operatorname{vers} x \quad \dots \quad dy = -dx \cos x$$

$$\text{Wie man weißt ist } \sin \operatorname{vers} x = 1 - \cos x \text{ und}$$

$$\cos \operatorname{vers} x = 1 - \sin x$$

deswegen ist

$$y = \sin \operatorname{vers} x \quad \dots \quad dy = dx \sin x$$

$$y = \cos \operatorname{vers} x \quad \dots \quad dy = -dx \cos x$$

$$d \cdot x^y = y x^{y-1} dx + x^y dy \cdot \log x$$

$y = \sin x$ und $x = \arcsin y$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$y = \cos x \quad \dots \quad dx = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$y = \lg x \quad \dots \quad dx = \frac{dy}{1+y^2}$$

$$y = \operatorname{ctg} x \quad \dots \quad dx = -\frac{dy}{1+y^2}$$

$$y = \sec x \quad \dots \quad dx = \frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}}$$

$$y = \operatorname{cosec} x \quad \dots \quad dx = -\frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}}$$

$$y = \sin \operatorname{vers} x \quad \dots \quad dx = \frac{dy}{\sqrt{y(2-y)}}$$

$$y = \cos \operatorname{vers} x \quad \dots \quad dx = -\frac{dy}{\sqrt{y(2-y)}} \quad \dots$$

Das Differential der Subtangente = $\frac{y dx}{dy}$

Subnormale = $\frac{y^2}{x}$

$$\begin{aligned} \text{Tangente} &= y \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}} = \\ &= y \sqrt{dx^2 + dy^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Normale} &= y \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \\ &= \frac{y \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} \end{aligned}$$

Das Differential eines Segmentes = $y dx$

z. B. $x^2 + y^2 = a^2$ ist die Gleichung eines Kreises
also wenn s ein Segment hiebt -- $ds = dx \sqrt{a^2 - x^2}$

Das Differential einer Tangente ist auch
folgend $y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x)$

Das Differential eines Krümmungshalb-
messers, der ρ heißen soll ist

$$\rho = \frac{+ (dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx dy^2}$$

und dabei

$$x - \alpha = \frac{dy (dx^2 + dy^2)}{dx dy^2}$$

$$y - \beta = - \frac{dx^2 + dy^2}{dy^2}$$

Die zwei letzten Gleichungen drücken die Coor-
dinaten des Mittelpunktes des Krümmungs-
kreises dessen Halbmesser ρ aus. Der Kreis
heißt auch oskulirendes Kreis. Dessen Krüm-
mungshalbmesser wird aus der Entwicklung
einer Curve und eines mit ihr oskulirenden
Kreises abgeleitet. Ein Kreis heißt oscu-
lirend, der drei gemeinschaftliche Punkte mit
einer Curve hat.

Es heißen x, y die Coordinaten der Curve und
 x', y' die des Kreises. Für die drei Punkte
wird man haben

$$y' = y$$

$$\frac{\partial y'}{\partial x} h + c_1 = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} h + c_1$$

$$\frac{\partial^2 y'}{\partial x^2} h + c_1 = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + c_1$$

$$a^2 v$$

$$y' = y$$

$$\frac{\partial y'}{\partial x} + c_1 = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + c_1$$

$$\frac{\partial^2 y'}{\partial x^2} + c_1 = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + c_1$$

man setzt, dass man in den Ausdrücken
 $y', \frac{\partial y'}{\partial x}, \frac{\partial^2 y'}{\partial x^2}, \dots$ ~~x' in x~~ aus den Gleichungen
 der Linie abgeleitet, x' in x verwechselt
 hat. Wenn man jetzt auf die Grenzen
 übergeht, indem man $h=0$ voraussetzt
 die drei Durchschnitts-Punkte werden in
 einen und den selben zusammenlaufen, der
 die Annäherung befreit, und für welchen
 die Näherungsgleichungen sind.

$$y' = y, \quad \frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 y'}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Wenn jetzt $(x'-x)^2 + (y'-y)^2 = r^2$ die Gleichung
 des Kreises ist, und wenn man sie differenzia-
 liert, so wird man bekommen

$$(x'-\alpha) + (y'-\beta) \frac{dy'}{dx'} = 0$$

$$1 + \frac{dy'^2}{dx'^2} + (y'-\beta) \frac{d^2y'}{dx'^2} = 0$$

wenn man jetzt x' anstatt x setzt, so sollen die
Werte der y , $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ dieselben seyn die
man aus der Gleichung der Curve erhält. Macht
man diese Substitution so werden die folgenden
Gleichungen in folgende

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

$$(x-\alpha) + (y-\beta) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$1 + \frac{d^2y}{dx^2} + (y-\beta) \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

übergehen. — Die zwei letzten geben die Werte

$$y-\beta \text{ und } x-\alpha$$

Substituiert man diese Werte in der ersten von den
zweiten drei Gleichungen, so wird man bekommen,
weder y oder den Halbmesser des oskulirenden
Kreises oder den Krümmungshalbmesser,

$$d(x+y+z+\dots) = dx + dy + dz + \dots \quad d(\log x) = \frac{dx}{x}$$

$$d(xy) = x dy + y dx$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y dx - x dy}{y^2}$$

$$d(x^m) = m x^{m-1} dx$$

$$d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

$$d(e^x) = e^x dx, \text{ denn } \log e = 1$$

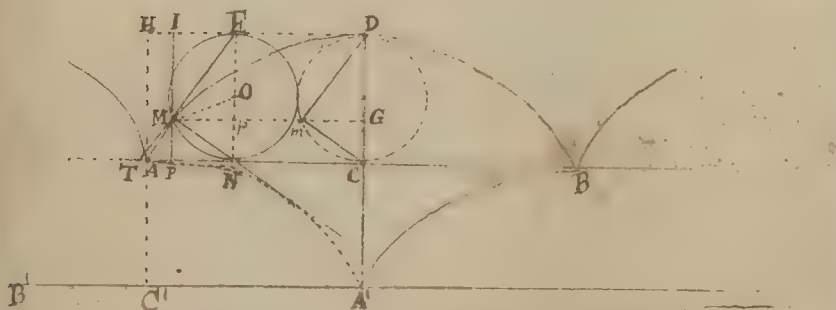
$$d(x^2) = 2x^{2-1} dx = 2x dx \log x$$

$$\begin{aligned} d. \log. \sin x &= dx \cot x & d. \log. \cos x &= -dx \tan x \\ d. \log. \tan x &= \frac{dx}{\sin x \cos x} & d. \log. \cot x &= -\frac{dx}{\sin x \cos x} \\ d. \log. \sec x &= dx \tan x & d. \log. \csc x &= -dx \cot x \end{aligned}$$

$$y = \frac{e^{xV-1} - e^{-xV-1}}{2V-1} = \sinh x \text{ for wind}$$

$$dy = \frac{d(e^{xV-1})}{2V-1} = \frac{e^{xV-1} \cdot V-1 dx - e^{xV-1} \cdot V-1 dx}{2V-1} = \frac{(e^{xV-1} + e^{-xV-1}) dx}{2} = \cos x dx$$

Cyclonite.



$AP = x$ arc. $NM = AN = AP + PN$ add, and $PN = Mp = \sqrt{ray^2 - y^2}$
 $PM = r$ and a in the triangle PMN are the arc and chord of the
 double \angle , arc. $MN =$ arc. in. ray . $Np =$ arc. in. $(p =$ arc. in. $Mp)$
 arc. $MN = a$ arc. in. ray . $(\frac{y}{a}) = a$ arc. in. $(\frac{r}{a}) = a$ arc. in. $(\sqrt{ray^2 - y^2})$

$$x + \sqrt{2ay - y^2} = a, \text{ are, inverses, } (\frac{y}{a})$$

$$x = a \cdot \text{arc. sin. vers.} \left(\frac{y}{a} \right) - \sqrt{a^2 y^2 - y^4}$$

$$\text{over } x = a \cdot \arccos\left(\frac{a-y}{a}\right) - \sqrt{a^2 - y^2}$$

als die gesuchte Gleichung der Cycloide

Differenziert man eine dieser Gleichungen z. B. die letzte, so erhält man

$$dx = \frac{ady}{\sqrt{a^2 - (a-y)^2}} = \frac{(a-y) dy}{\sqrt{2ay - y^2}} \quad \text{oder}$$

$$dx = \frac{y dy}{\sqrt{2ay - y^2}} \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{2ay - y^2}}$$

als Differentialgleichung des Cycloids.

Aus dieser Gleichung erhält man leicht

$$\text{Subtangente } PT = \frac{y^2}{\sqrt{2ay - y^2}}$$

$$\text{Subnormale } PN = \sqrt{2ay - y^2}$$

$$\text{Tangente } MT = \frac{y\sqrt{2ay}}{\sqrt{2ay - y^2}}$$

$$\text{Normale } MN = \sqrt{2ay}$$

Differenziert man noch mal die Gleichung des Cycloids, so ist für $\frac{dy}{dx}$ der Wert 1, so bekommt man

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y^2}$$

welcher Ausdruck zeigt, daß die Cycloide ihre konvexe Seite der Abszissen-Axe zukehrt. Diese Werte für beiden Differentialquotienten ist die allgemeine Gleichung für Krümmungshalbmesser gesetzt gibt den Krümmungshalbmesser des Cycloids.

woher, man sieht, daß der Krümmungshalbmesser des Cycloids in jedem Punkte des entsprechenden Doppelpunkts Normalen gleich ist.

Man findet auch ohne Mühe die Coordinaten des Mittelpunktes des Krümmungskreis für irgend einen Punkt x, y der Cycloide

$$x - \alpha = -2\sqrt{2ay - y^2}$$

$$y - \beta = 2y$$

und daraus

$$\alpha = x + 2\sqrt{2ay - y^2}$$

$$\beta = -y$$

Setzt man in der ersten dieser Gleichungen für x sein Werth aus der primitiven Gleichung der Cycloide, und eliminiert aus dieser und der zweiten y so erhält man

$$\alpha = a \cdot \text{arc. sin. vers.} \left(-\frac{\beta}{a} \right) + \sqrt{2a\beta - \beta^2}$$

als die Gleichung der Evolute, welche sofort zeigt, dass die Evolute bei den angenommenen Coordinatensysteme nur für negative Ordinaten besteht.

Diese letzte Gleichung verwandelt sich

$$\text{in } \alpha = a \cdot \text{arc. sin. vers.} \left(\frac{\beta}{a} \right) - \sqrt{2a\beta - \beta^2}$$

indem man die Abstände nicht von C' son, dern von A' zählt, weswegen wird man statt

$$\alpha, A'C' - \alpha = a\pi - \alpha \text{ setzen und ferner}$$

$$\text{ist } \pi - \text{arc. sin. vers.} \left(\frac{2a - \beta}{a} \right) = \text{arc. sin. vers.} \left(\frac{\beta}{a} \right)$$

Die vorige Gleichung zeigt, dass die Evolute auch eine Cycloide ist.

Das Element des Bogens einer Cycloide $ds = \sqrt{2a} \frac{dy}{\sqrt{2ay - y^2}}$
 — der Fläche $d\sigma = \frac{y^2 dx}{\sqrt{2ay - y^2}}$

Sei $u = \log \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$

Setzt man

$$y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$$

$$z = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$$

so wird $u = \log \frac{y}{z} = \log y - \log z$

also $du = \frac{dy}{y} - \frac{dz}{z}$

Es ist aber $\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{2\sqrt{1+x}} - \frac{dx}{2\sqrt{1-x}} = -\frac{dx}{2\sqrt{1-x^2}} \left\{ \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \right\} =$

$$= -\frac{z dx}{2\sqrt{1-x^2}}$$

und ebenso wird

$$dz = \frac{y dx}{2\sqrt{1-x^2}} \quad \text{für}$$

und daher $\frac{dy}{y} - \frac{dz}{z} = -\frac{(y^2 + z^2) dx}{2yz\sqrt{1-x^2}}$

aber $y^2 + z^2 = 4$ und $yz = 2x$

so ist endlich

$$du = -\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \frac{a+bz}{\alpha+\beta z} \quad \dots \quad dy = \frac{b\alpha - a\beta}{(\alpha+\beta z)^2} dz$$

$$y = \frac{a-bz}{\alpha-\beta z} \quad \dots \quad dy = \frac{-b\alpha + a\beta}{(\alpha-\beta z)^2} dz$$

$$y = \frac{a+bz}{\alpha-\beta z} \quad \dots \quad dy = \frac{b\alpha + a\beta}{(\alpha-\beta z)^2} dz$$

$$y = \frac{a-bz}{\alpha+\beta z} \quad \dots \quad dy = \frac{-b\alpha - a\beta}{(\alpha+\beta z)^2} dz$$

$$y = (\varphi x)^n \quad \dots \quad dy = n(\varphi x)^{n-1} d\varphi x$$

$$y = (\varphi z)^n \quad \dots \quad dy = n(\varphi z)^{n-1} d\varphi z dz$$

$$y = z^{\frac{1}{n}} \quad \dots \quad dy = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz$$

$$y = \sqrt[n]{z} \quad \dots \quad dy = \frac{1}{n} \frac{dz}{\sqrt[n]{z}^{n-1}}$$

$$y = z^{\frac{m}{n}} \quad \dots \quad dy = \frac{m}{n} z^{\frac{m}{n}-1} dz$$

$$y = \sqrt[n]{z^m} \quad \dots \quad dy = \frac{m}{n} \frac{dz}{\sqrt[n]{z}^{n-m}}$$

$$y = \sqrt{z} \quad \dots \quad dy = \frac{1}{2} \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

$$y = \sqrt[3]{z} \quad \dots \quad dy = \frac{1}{3} \frac{dz}{\sqrt[3]{z}^2}$$

$$y = \sqrt[4]{z} \quad \dots \quad dy = \frac{1}{4} \frac{dz}{\sqrt[4]{z}^3}$$

$$y = \sqrt{z^3} = z\sqrt{z} \quad \dots \quad dy = \frac{3}{2} \sqrt{z} dz$$

$$y = \sqrt[3]{z^2} \quad \dots \quad dy = \frac{2}{3} \frac{dz}{\sqrt[3]{z}}$$

$$y = \sqrt[4]{z^5} = z\sqrt[4]{z} \quad \dots \quad dy = \frac{5}{4} \sqrt[4]{z} dz$$

$$y = \sqrt[5]{z^3} \quad \dots \quad dy = \frac{3}{5} \frac{dz}{\sqrt[5]{z}^2}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{z}} \quad \dots \quad dy = -\frac{1}{2} \frac{dz}{2\sqrt{z}}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{z}} \quad \dots \quad dy = -\frac{1}{3} \frac{dz}{2\sqrt[3]{z}}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt[4]{z}} \quad \dots \quad dy = -\frac{1}{4} \frac{dz}{2\sqrt[4]{z}}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt[5]{z^2}} \quad \dots \quad dy = -\frac{2}{5} \frac{dz}{2\sqrt[5]{z^2}}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt[5]{z^5}} \quad \dots \quad dy = -\frac{5}{5} \frac{dz}{2\sqrt[5]{z^5}}$$

$$y = (a+bz^n)^m \quad \dots \quad dy = mn bz^{n-1} (a+bz^n)^{m-1} dz$$

$$y = (a+bz^n)^{-m} \\ = \frac{1}{(a+bz^n)^m} \quad \dots \quad dy = - \frac{mn bz^{n-1} dz}{(a+bz^n)^{m+1}}$$

$$y = (a+bz^n)^{\frac{1}{n}} \quad \dots \quad dy = \frac{n}{n+1} \frac{bz^{n-1} dz}{(a+bz^n)^{\frac{n}{n+1}}} \\ = \sqrt[n]{a+bz^n} \quad \dots \quad = \frac{n}{n+1} \frac{bz^{n-1} dz}{\sqrt[n]{(a+bz^n)^{n+1}}}$$

$$y = (a+bz^n)^{\frac{m}{n}} \quad \dots \quad dy = \frac{mn}{n} \frac{bz^{n-1} dz}{(a+bz^n)^{\frac{m}{n}+1}} \\ = \sqrt[n]{(a+bz^n)^m} \quad \dots$$

$$y = \frac{1}{\sqrt[n]{(a+bz^n)^m}} \quad \dots \quad dy = - \frac{mn}{n} \frac{bz^{n-1} dz}{\sqrt[n]{(a+bz^n)^{m+n}}} \\ = (a+bz^n)^{-\frac{m}{n}} \quad \dots$$

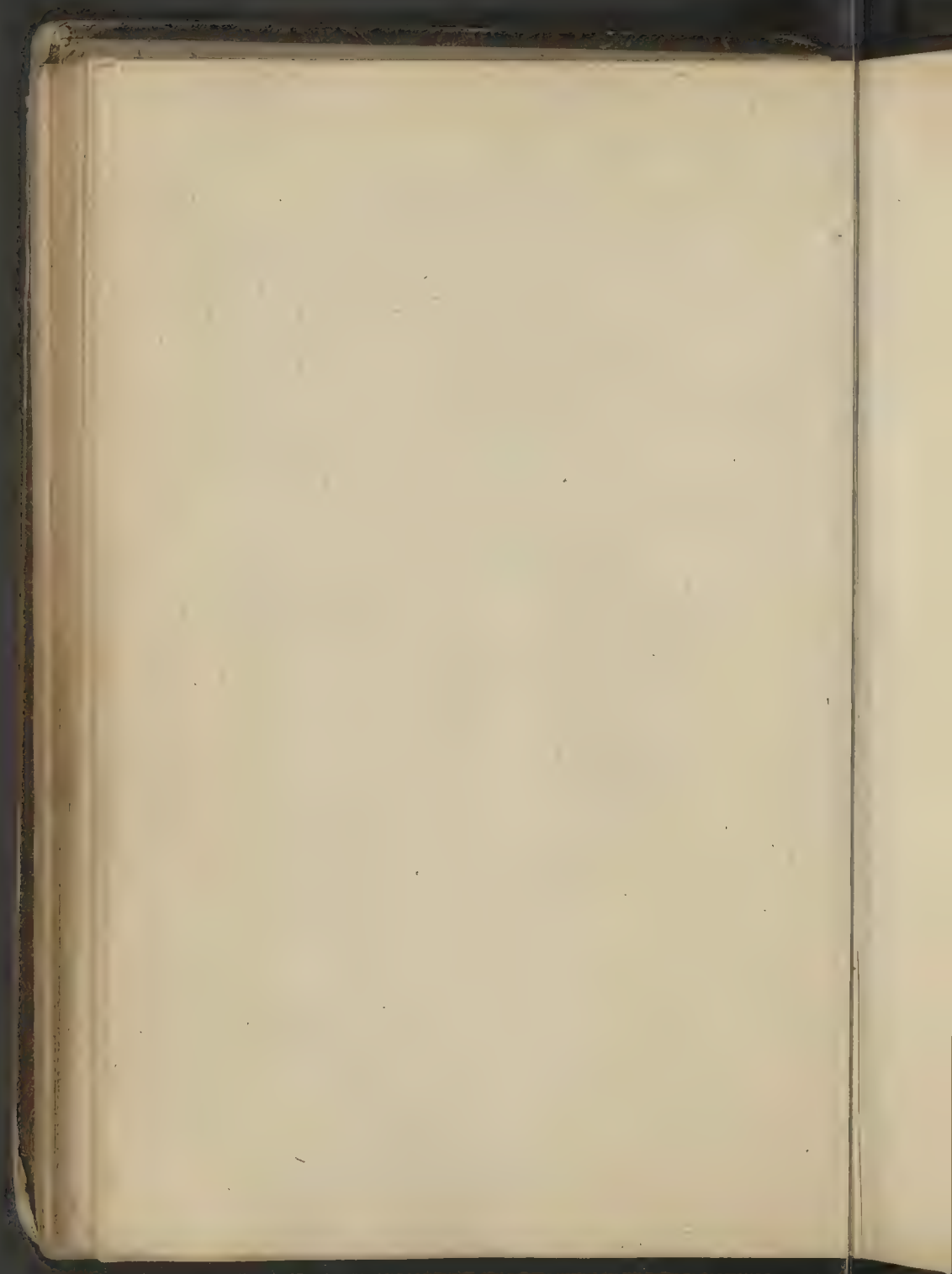
$$y = z^p (a+bz^n)^m \quad \dots \quad dy = z^{p-1} (a+bz^n)^{m-1} \{ p(a+bz^n) + mn bz^n \} dz$$

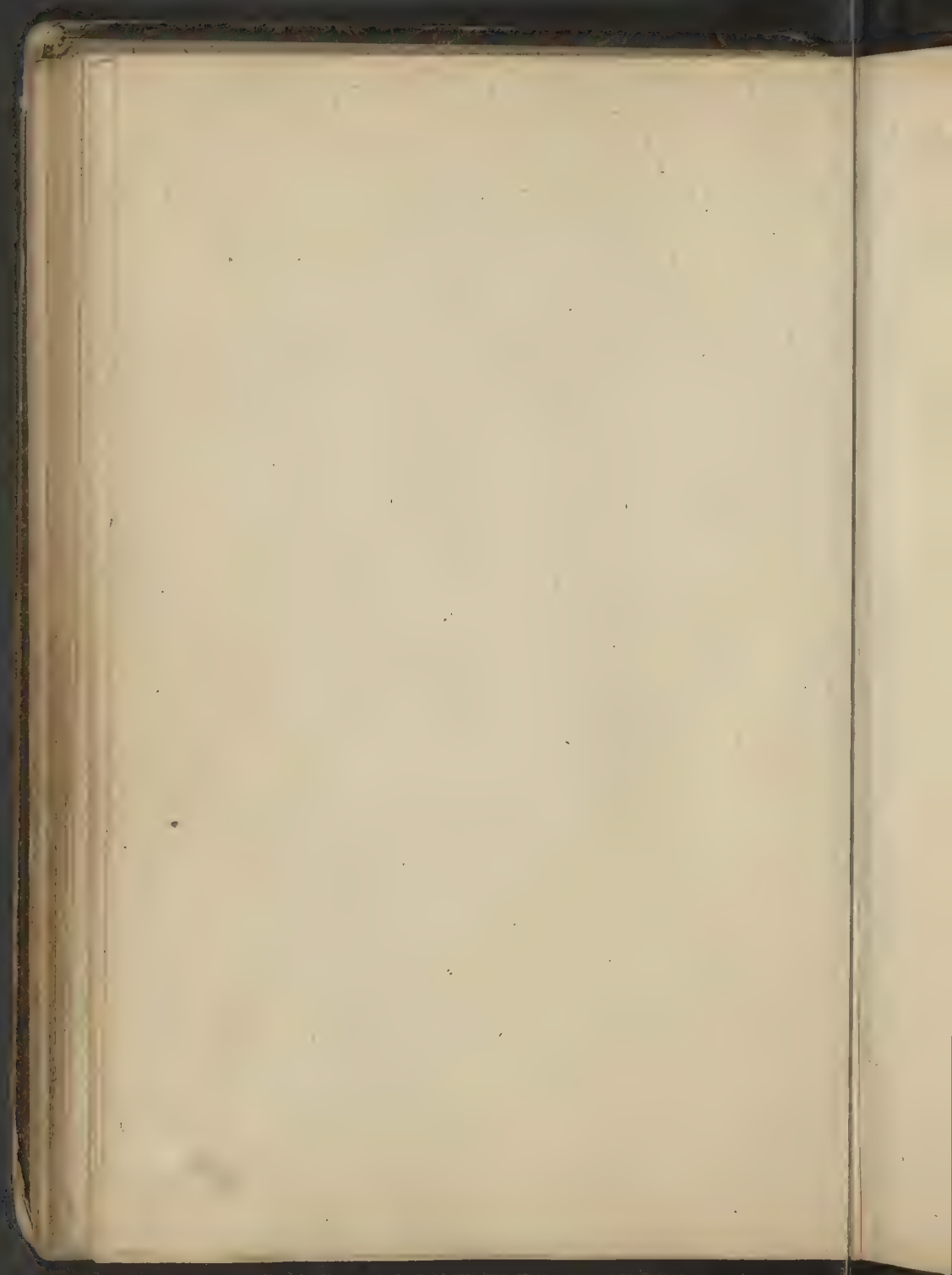
$$y = \sqrt{a+bz^2} \quad \dots \quad dy = \frac{a+2bz^2}{\sqrt{a+bz^2}} dz$$

$$y = \frac{\sqrt{a+bz^2}}{2} \quad \dots \quad dy = \frac{a dz}{2^2 \sqrt{a+bz^2}}$$

$$y = \frac{2}{\sqrt{a+bz^2}} \quad \dots \quad dy = \frac{a dz}{\sqrt{(a+bz^2)^3}}$$

$$y = \frac{1}{2 \sqrt{a+bz^2}} \quad \dots \quad dy = - \frac{a+2bz^2}{2^2 (a+bz^2)^{\frac{3}{2}}} dz$$





$$\int \frac{dx}{1-x}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2}$$

$$\int \frac{dx}{1+x}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}}$$

$$\int dx \sqrt{a}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+x}}$$

$$\int \frac{a dx}{b-cx^2}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}$$

Integralrechnung

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \frac{x-a}{x+a} \quad \left(\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arc tang} \frac{x}{a} \right)$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \text{const.}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{Arc tang} x + \text{const.}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arc Sin} x + \text{const.} = \frac{1}{2} \operatorname{Arc Sin} x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log(x + \sqrt{1+x^2}) + \text{const.}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\log\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) + \text{const.}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = -\log\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right) + \text{const.}$$

$$\int dx \sqrt{a+bx^2} = \frac{1}{2} x \sqrt{a+bx^2} + \frac{1}{2} a \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \log \frac{-\sqrt{a} + \sqrt{a+bx^2}}{x}$$

$$\int \frac{adx}{b-cx^2} = \int \frac{a}{1-\frac{c}{b}x^2} dx = \frac{a}{\sqrt{cb}} \int \frac{dx \sqrt{c}}{1-\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}x^2} = \frac{a}{2\sqrt{cb}} \log \frac{b+cx}{b-cx}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+rbx+cx^2}} = \log(b+x+\sqrt{a+rbx+cx^2})$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+rbx-x^2}} = \operatorname{Arc Sin} \frac{x-b}{\sqrt{b^2+a}}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{-a+rbx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{Arc Sin} \frac{b-a}{x\sqrt{a+bx}}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{a+rbx+cx^2}} &= -\frac{1}{\sqrt{a}} \log \frac{a+bx+\sqrt{a+rbx+cx^2}}{x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \log \frac{a+bx-\sqrt{a+rbx+cx^2}}{x} \end{aligned}$$

$$\int dx \cos x = \sin x + \text{const.}$$

$$\int dx \sin x = -\cos x + \text{const.}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + \text{const.}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + \text{const.}$$

$$\int dx \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin x + \text{const.}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log \tan \frac{1}{2} x + \text{const.}$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \log \tan(45^\circ + \frac{1}{2} x) + \text{const.}$$

$$\int \frac{dx \cos x}{\sin x} = \int \frac{dx}{\tan x} = \log \sin x + \text{const.}$$

$$\int \frac{dx \sin x}{\cos x} = \int dx \tan x = -\log \cos x + \text{const.}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \log \tan x$$

Reduction Formulas

$$\int \frac{x^{m-1} dx}{(a+bx^n)^p} = -\frac{x^{m-n}}{(p-1)nb(a+bx^n)^{p-1}} + \frac{m-n}{nb(p-1)} \int \frac{x^{m-n-1} dx}{(a+bx^n)^{p-1}}$$

$$\int \frac{x(a+bx^n)^p}{x^m} = -\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{nb(p+1)}{m-1} \int \frac{x(a+bx^n)^p}{x^{m-n}}$$

$$\int x^{m-1} dx (a+bx^n)^p = \frac{x^m (a+bx^n)^{p+1}}{(np+m)b} - \frac{(m-n)a}{(np+m)b} \int x^{m-n-1} dx (a+bx^n)^p$$

$$\int \frac{dx (a+bx^n)^p}{x^m} = -\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{(m-1)a x^{m-1}} - \frac{(m-n-1-np)b}{(m-1)a} \int \frac{dx (a+bx^n)^p}{x^{m-n}}$$

$$\int \frac{x^{m-1} dx}{(a+bx^n)^p} = \frac{x^m}{(p-1)an(a+bx^n)^{p-1}} - \frac{m+n-np}{(p-1)an} \int \frac{x^{m-1} dx}{(a+bx^n)^{p-1}}$$

$$\int \frac{x^{m-1} dx}{(a+bx^n)^p} = \frac{x^{m-n}}{(m-np)b(a+bx^n)^p} - \frac{(m-n)a}{(m-np)b} \int \frac{x^{m-n-1} dx}{(a+bx^n)^p}$$

$$\int dx \sin^m x \cos^n x = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int dx \sin^{m-2} x \cos^n x$$

$$\int dx \sin^m x \cos^n x = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int dx \sin^m x \cos^{n-2} x$$

$$\int \frac{dx \sin^m x}{\cos^n x} = \frac{\sin^{m-1} x}{(n-1) \cos^{n-1} x} - \frac{m-1}{n-1} \int \frac{dx \sin^{m-2} x}{\cos^{n-2} x}$$

$$\int \frac{dx \cos^n x}{\sin^m x} = -\frac{\cos^{n-1} x}{(m-1) \sin^{m-1} x} - \frac{n-1}{m-1} \int \frac{dx \cos^{n-2} x}{\sin^{m-2} x}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^m x} = -\frac{1}{m-1} \cdot \frac{\cos x}{\sin^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin^{m-2} x}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = -\frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{\sin^{m-1} x \cos^n x} + \frac{m+n-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin^{m-2} x \cos^n x}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{\sin^m x \cos^{n-1} x} + \frac{m+n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^m x \cos^{n-2} x}$$

$$\int \frac{dx \sin^m x}{\cos^n x} = -\frac{1}{m-1} \sin^{m-1} x + \int \frac{dx \sin^{m-2} x}{\cos^n x}$$

$$\int \frac{dx \cos^n x}{\sin^m x} = \frac{1}{n-1} \cos^{n-1} x + \int \frac{dx \cos^{n-2} x}{\sin^m x}$$

$$\int \frac{dx}{a+b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{Arc} \cos \frac{b+a \cos x}{a+b \cos x}$$

$$\int \frac{dx}{a+b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \log \frac{\sqrt{a+b} + \tan \frac{1}{2} x \sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} - \tan \frac{1}{2} x \sqrt{a-b}}$$

$$\int dx \cdot \text{Arc Sin } x = x \text{ Arc Sin } x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int x^m dx \text{ Arc Sin } x = \frac{x^{m+1}}{m+1} \text{ Arc Sin } x - \frac{1}{m+1} \int \frac{x^{m+1} dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

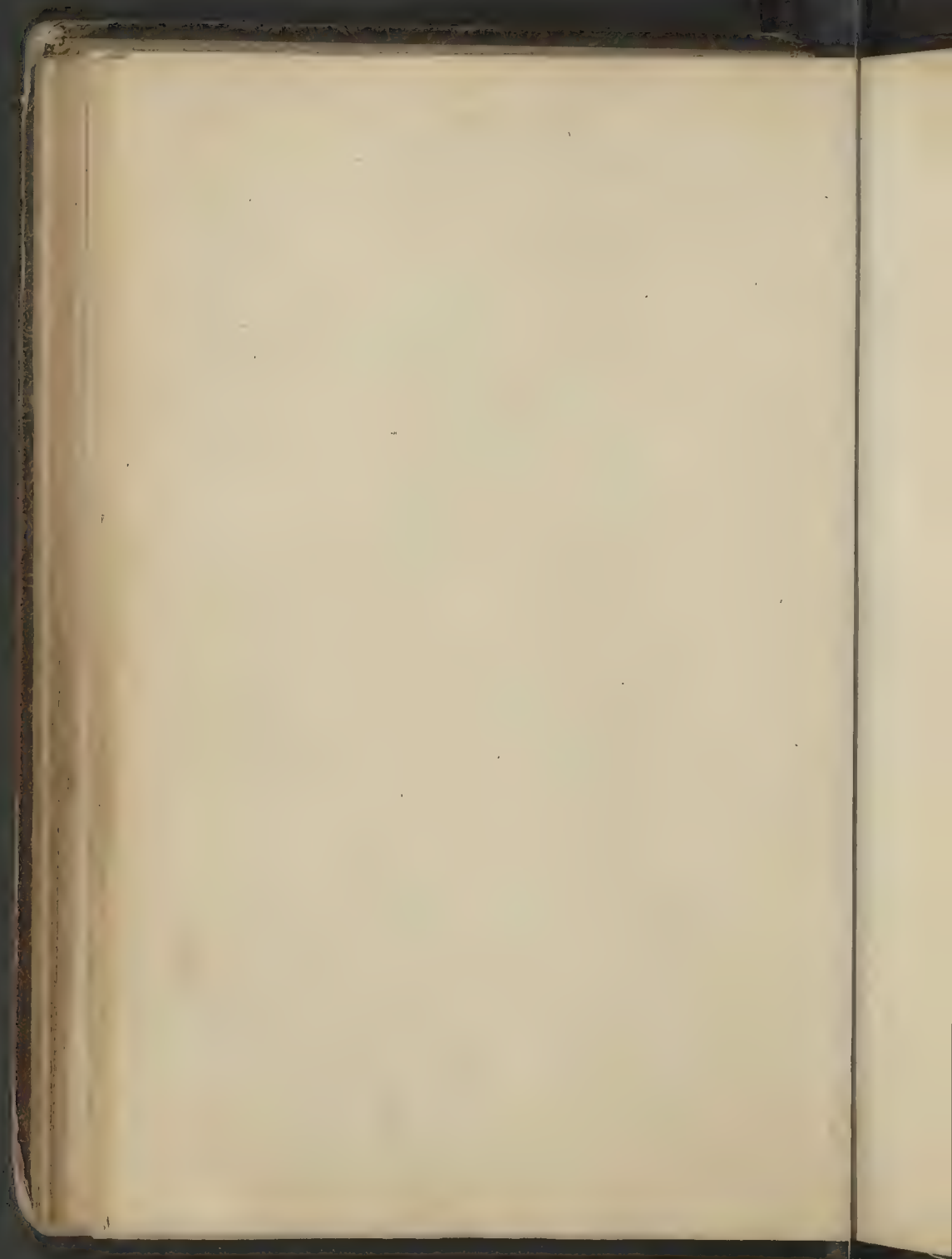
$$\int x^m dx \text{ Arc Cos } x = \frac{x^{m+1}}{m+1} \text{ Arc Cos } x + \frac{1}{m+1} \int \frac{x^{m+1} dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

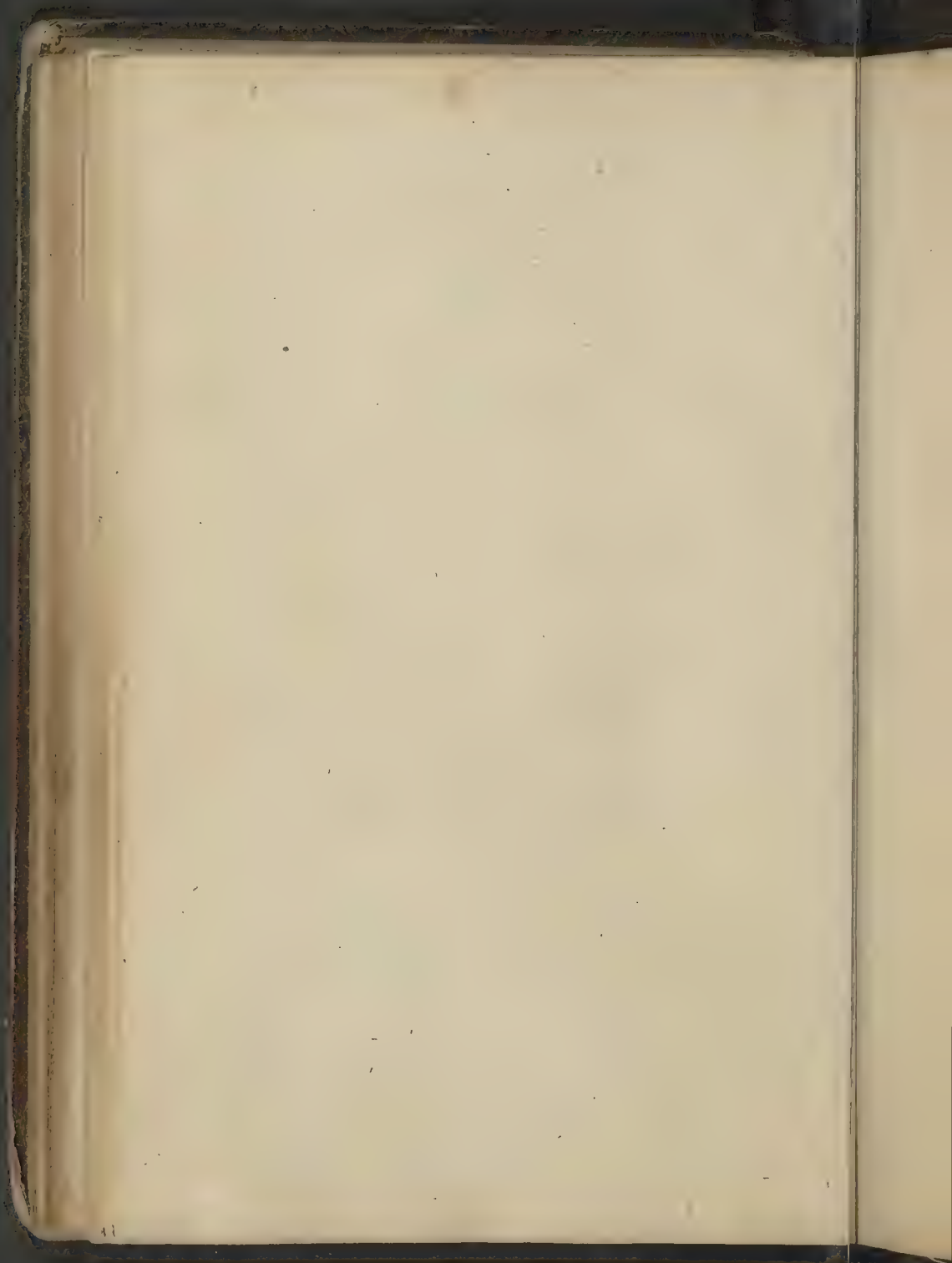
$$\int x^m dx \text{ Arc Log } x = \frac{x^{m+1}}{m+1} \text{ Arc Log } x - \frac{1}{m+1} \int \frac{x^{m+1} dx}{1+x^2}$$

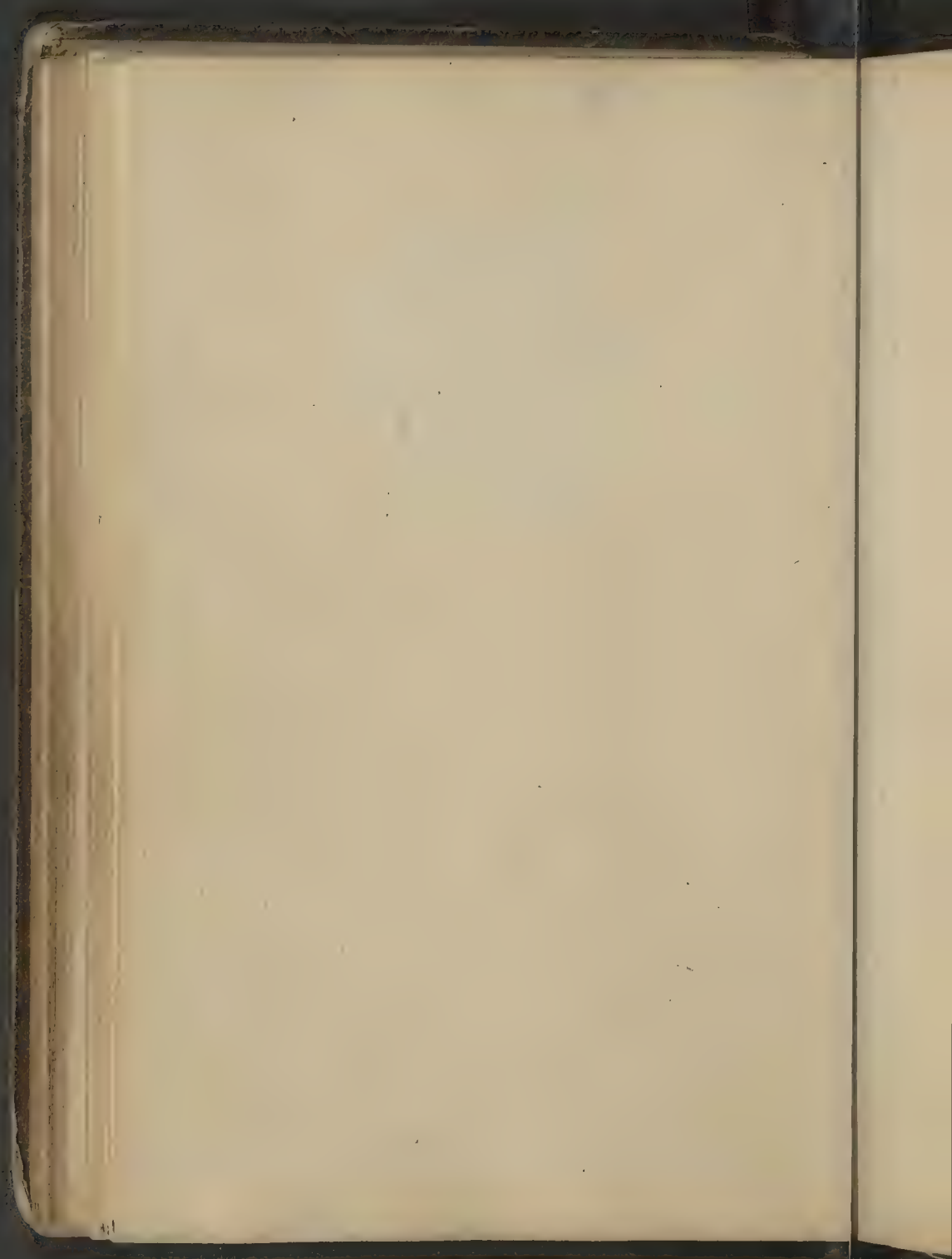
$$\int x^m dx \text{ Arc Log } x = \frac{x^{m+1}}{m+1} \text{ Arc Log } x + \frac{1}{m+1} \int \frac{x^{m+1} dx}{1+x^2}$$

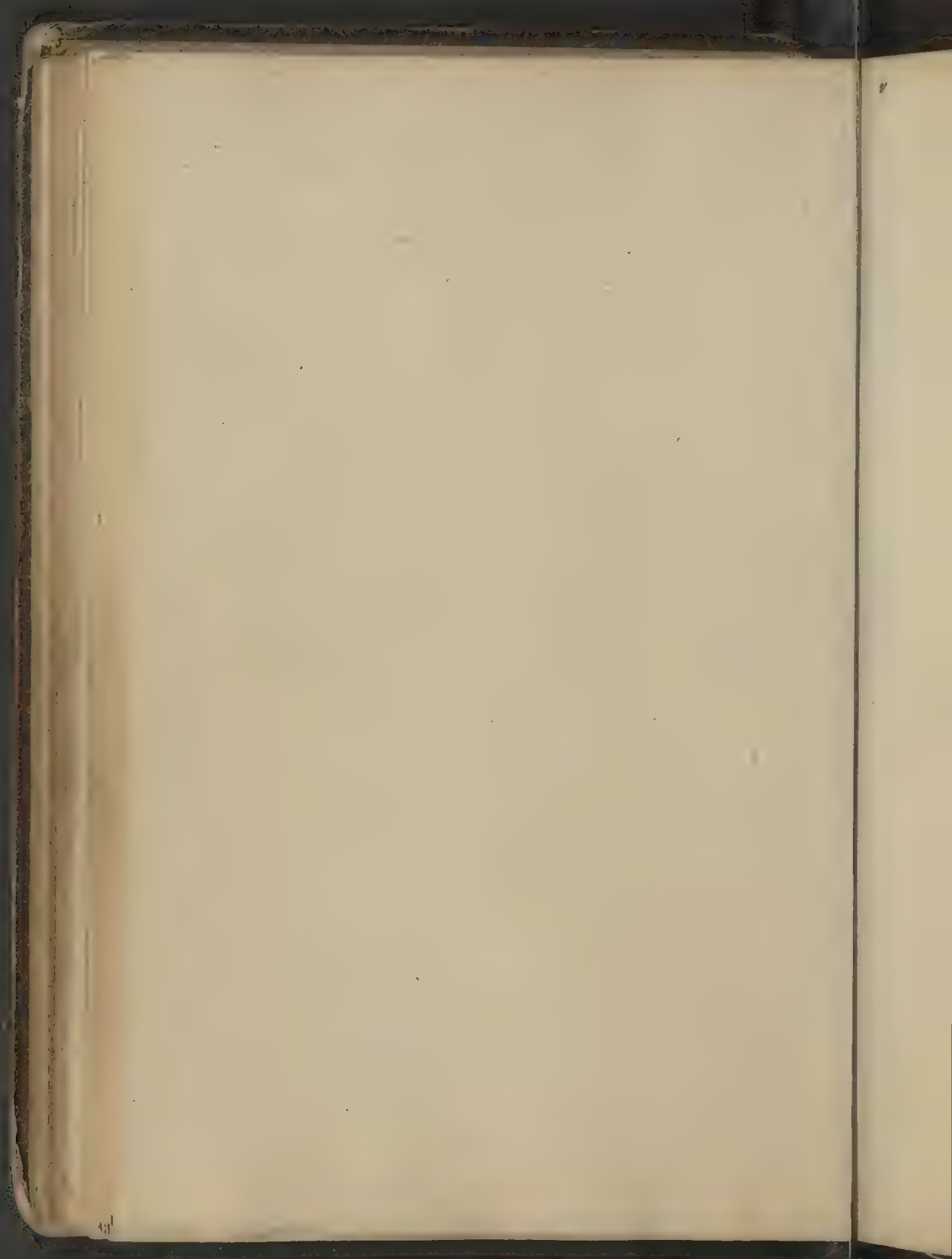
$$\int x^m dx \text{ Arc Sec } x = \frac{x^{m+1}}{m+1} \text{ Arc Sec } x - \frac{1}{m+1} \int \frac{x^{m+1} dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

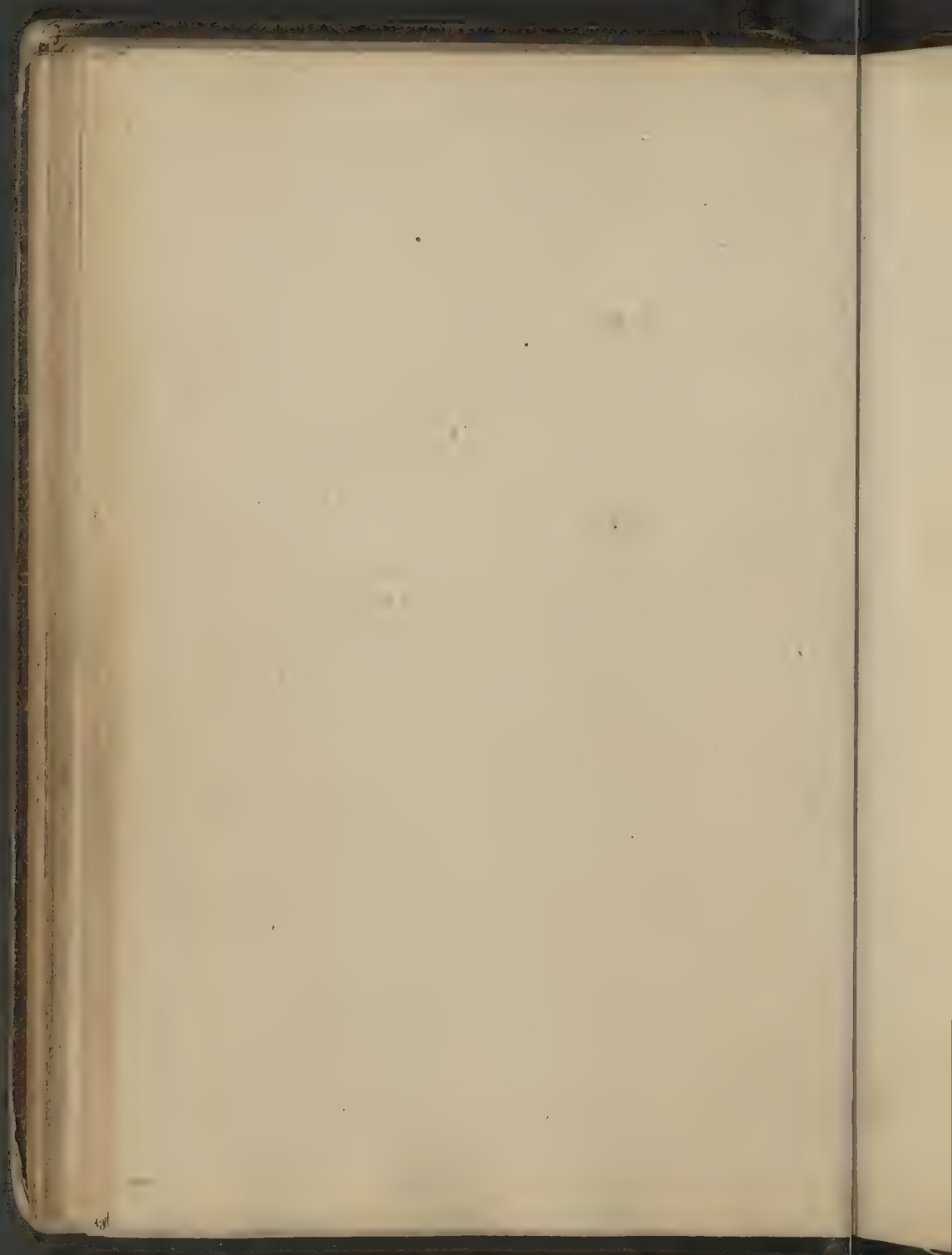
$$\int x^m dx \text{ Arc Cosec } x = \frac{x^{m+1}}{m+1} \text{ Arc Cosec } x + \frac{1}{m+1} \int \frac{x^{m+1} dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

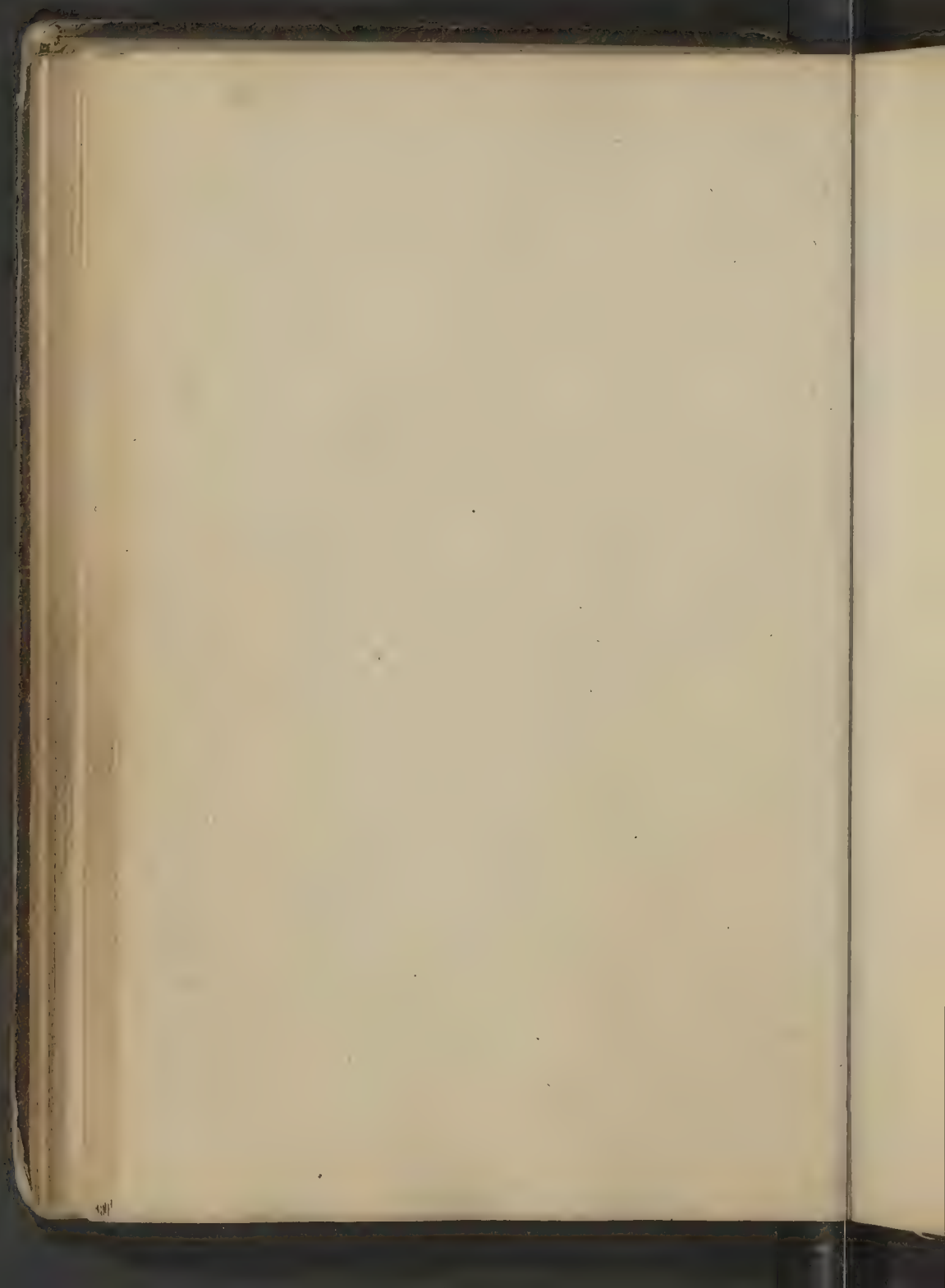


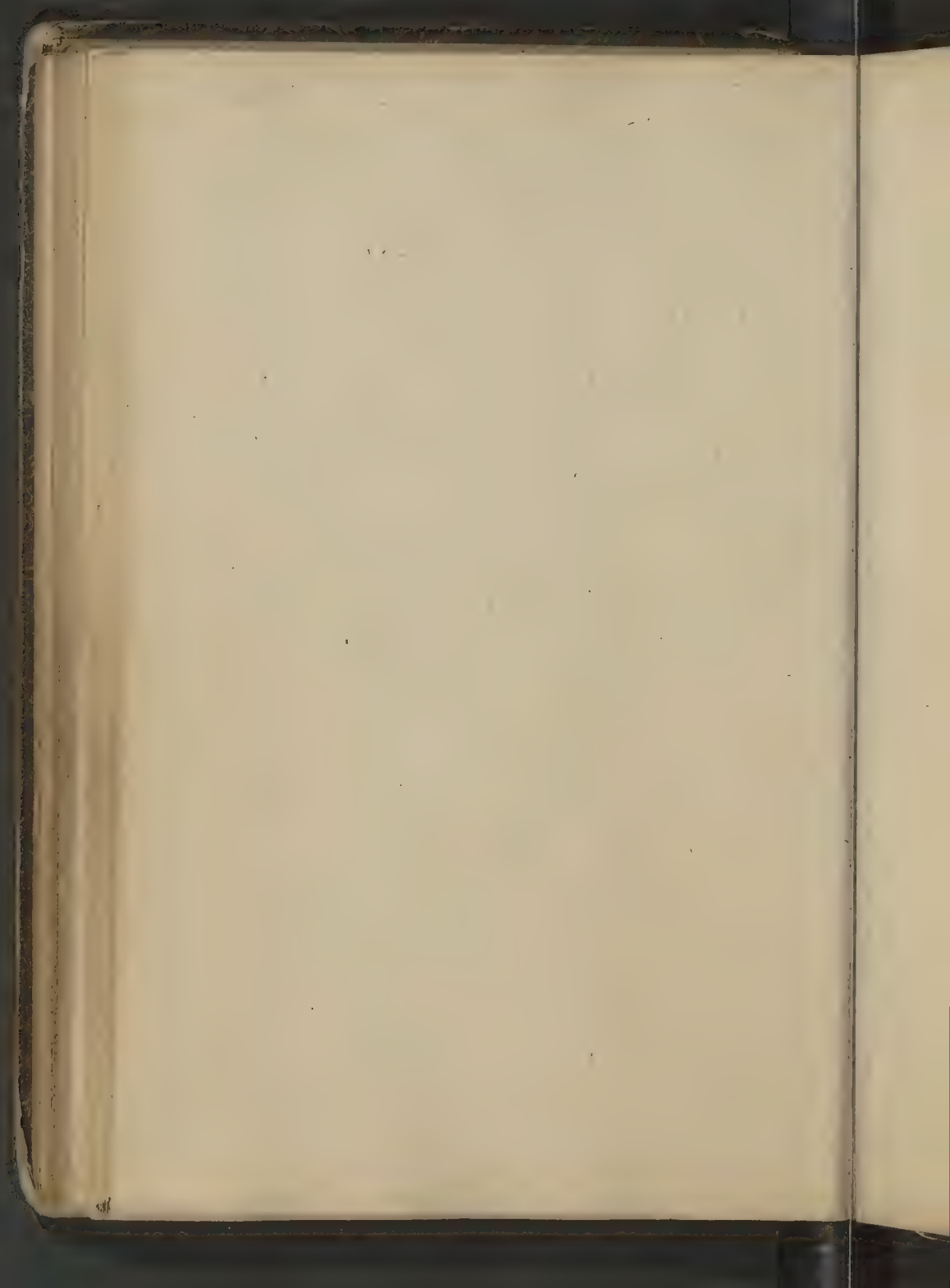












West
jiff m

Kian

mon

m

ma

md

Te h

try

Roc

raftin

w j

a res

(i)

m

clit

38

103

20

Glycerin

vinic

D y

stirring

spice

hardly

gliny

Wszystkie najnowszym rachunkom słaby sygnifikant
jest na całym świecie mieszkaniowiec
1228 milionów dusz

Kaukaskiej rasy	— — —	360 milionów
mongolskiej	— — —	552 —
muzujskiej	— — —	190 —
malajskiej	— — —	170 —
indoamerykańskiej	— — —	1 —

Te ludzkie mowy 3642 językami
wyróżniają 1000 religij.

Roczna śmiertelność wynosi 33 $\frac{1}{3}$ milionów

zatem dzienna śmiertelność 91554

w jednej minucie umiera 3780

a sekunda w jednej sekundzie 62

(Wochehschrift von Dr. Heis in

Münster 28^{te} 3. Jahr 1870)

Nitrogliceryna jest niesfranine

380 gram. Gliceryny w 31°C.

1030 kwasu azotanowego w 50°

2000 kwasu siarkowego

Gliceryna powinna być wypróżniona, aby nie
wchodziła do kwasu

Dynamit czyli Dynamita, jest niesfranine

Nitrogliceryny z krzemionką delikatnie

spresowana. Kaniast krzemionki używa się

bardziej do obrotowego przególnia. Lubi się

glinę z piaskiem do wypalenia czyli heł z huty żelaznej.

Prof. Richler in Elbing hat π auf 333⁶⁷
verhügte Decimale berechnet und gefunden

$\pi = 3 \cdot 14159 \ 26535 \ 89793 \ 23846 \ 26433 \ 83279 \ 50288$
 $41971 \ 69399 \ 37510 \ 58209 \ 74944 \ 59230 \ 78164$
 $06286 \ 20899 \ 86280 \ 34825 \ 34211 \ 70679 \ 82148$
 $08651 \ 32823 \ 06647 \ 09384 \ 46095 \ 50582 \ 23172$
 $53594 \ 08128 \ 48111 \ 74502 \ 84102 \ 70193 \ 85211$
 $05559 \ 64462 \ 29489 \ 54930 \ 38196 \ 44288 \ 10979$
 $66593 \ 34461 \ 28475 \ 64823 \ 37867 \ 83165 \ 27120$
 $19091 \ 45648 \ 56692 \ 34603 \ 48610 \ 45432 \ 66482$
 $13393 \ 60726 \ 02491 \ 41273 \ 72458 \ 70066 \ 06315$
 $58817 \ 48815 \ 20920 \ 8981 \dots\dots\dots$
 $9628264882 \ 92540 \ 91715$

$36436 \ 78925 \ 90360 \ 01133 \ 05305 \ 48820$
 $46652 \ 13841 \ 46651 \ 94157 \ 16094$

Die 333⁶⁷ von Richler hat Director Ströbke
in Paris berechnet.

Crutcher hat π in 440 Ziffern berechnet und
die ersten 330 mit denen von Richler einstimmig ge-
funden, statt aber der drei letzten 098, hat er 962...

Shanks von Crutcherfort ermuntert, hat π bis auf
330 Ziffern berechnet. Die oben nach 330 folgenden
und von Ströbke angegebenen, sind die nemlichen welche
Shanks gefunden hat deswegen folgen hier die letzten
so wie sie in "Nouvelles Annales de Mathématiques" T. XIV
p. 216. vorkommen

$33057 \ 28036 \ 57595 \ 91953 \ 09218 \ 61173 \ 81932$
 $61179 \ 31051 \ 18548 \ 07446 \ 23799 \ 62749 \ 56735$
 $18857 \ 52724 \ 89122 \ 79381 \ 83011 \ 94912 \ 98336$
 $23362 \ 44065 \ 66430 \ 86021 \ 39488$

Die ersten 336 Ziffer sind von drei Rechner, Richler, Rich-
terfort und Shanks verificirt, die 440 von den beiden
Letzten.

Mit Hilfe des Newton'schen Binoms kann man sich leicht Wurzeln ausdrücken, aber wenn man schon ^{ein} räumlich nahen Werth von einer Wurzel kennt, so führt die Lambert'sche Formel eher aus. (Lied wie des Binoms). Diese Formel wißt so: Es sey a der genäherte Werth der Wurzel $\sqrt[m]{a}$, so ist $a = (x + x)^m$ wo x eine sehr kleine Größe bedeutet. Aber

$$(x+x)^m = x^m + m x^{m-1} x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} x^2 + \dots$$

vernachlässigt man die zweite und höheren Potenzen von x als ungenau klein, so wird $a = x^m + m x^{m-1} x$ also $x = \frac{a - x^m}{m x^{m-1}}$

Je näher wird der Werth von a der wahren Wurzel, desto kleiner wird der Fehler oder x . Hält man die zweite Potenz nicht vernachlässigt so wäre

$$a = x^m + m x^{m-1} x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} x^2$$

$$\text{und } x = \frac{a - x^m}{m x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} x}$$

Setzt man hier den vorigen genäherten Werth für x an diese letzte Gleichung, so bekommt man

$$x = \frac{2x(a - x^m)}{(m+1)x^m + (m-1)a}$$

$$\text{und daher } \sqrt[m]{a} = x + \frac{2x(a - x^m)}{(m+1)x^m + (m-1)a}$$

und das ist die Lambert'sche Formel.

$$\text{für } \sqrt[3]{a} = x + \frac{2x(a - x^3)}{3x^2 + a} \quad \sqrt[3]{a} = x + \frac{x(a - x^3)}{2x^2 + a}$$

Reihen

Geometrische Reihe

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1}$$

Die Summe dieser Reihe ist

$$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q} = \frac{aq^n}{q - 1} - \frac{a}{q - 1}$$

wo die erste der letzten Ausdrücke auf $q \neq 1$
und die zweite auf $q \neq 1$ sich bezieht.

$$(x+k)^m = x^m \left\{ 1 + m\left(\frac{k}{x}\right) + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}\left(\frac{k}{x}\right)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{k}{x}\right)^3 + \dots \right\}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

Setzt man $x=1$ so erhält man

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

und setzt man diese Reihe fort, so findet man
für den Werth von

$$e = 2.7182818284590452353602875$$

d. h. die Basis der Neper'schen Logarithmen

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$$

$$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$\operatorname{Arc} \cos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{160} - \frac{x^7}{1120} - \dots$$

$$\begin{aligned} \text{die } \lg x &= \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5(1+x^2)^{\frac{5}{2}} + \dots}} \\ \lg \frac{1+x}{1-x} &= \frac{2}{m} \left\{ x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right\} \end{aligned}$$

wo m ~~ist~~ Modul \log ist.

$\sin y = m \sin(x+y)$ gibt $y = m \sin x + \frac{1}{2} m^2 \sin 2x + \frac{1}{3} m^3 \sin 3x + \dots$

$\lg y = \frac{m \sin x}{1 - m \cos x}$ gibt dieselbe Reihe

$\sin(z-x) = m \sin z$ gibt $z = x + m \sin x + \frac{1}{2} m^2 \sin 2x + \frac{1}{3} m^3 \sin 3x + \dots$

$\sin \frac{z-x}{2} = m \sin \frac{z+x}{2} \dots \frac{1}{2} z = \frac{1}{2} x + m \sin x + \frac{1}{2} m^2 \sin 2x + \frac{1}{3} m^3 \sin 3x + \dots$

$\lg \frac{1}{2} z = \frac{1+m}{1-m} \lg \frac{1}{2} x$ gibt dieselbe Reihe

$\lg \frac{1}{2} y = \alpha \lg \frac{1}{2} x \dots \frac{1}{2} y = \frac{1}{2} x + \frac{(a-1)}{(a+1)} \sin x + \frac{1}{2} \frac{(a-1)^2}{(a+1)} \sin 2x + \dots$

$\lg \sqrt{1+2m \cos x + m^2} = 2m \cos x - \frac{1}{2} m^2 \cos 2x + \frac{1}{3} m^3 \cos 3x - \dots$

$\frac{1+m \cos x}{1+2m \cos x + m^2} = 1 - m \cos x + m^2 \cos^2 2x - m^3 \cos 3x + m^4 \cos 4x - \dots$

$\frac{m + \cos x}{1+2m \cos x + m^2} = \cos x - m \cos 2x + m^2 \cos 3x - m^3 \cos 4x + \dots$

$\frac{m \sin x}{1+2m \cos x + m^2} = m \sin x - m^2 \sin 2x + m^3 \sin 3x - m^4 \sin 4x + \dots$

$\lg x = 2 \left\{ \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^5 + \dots \right\}$

$\lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$

$\lg(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$

Wenn ein Bogen $p+q$ so klein ist, daß q nicht groß ist, so kann man immer den Werth von $\sin(p+q)$ in $\cos(p+q)$ aus zwei folgenden Reihen bekommen

$$\sin(p+q) = \sin p + q \cos p - \frac{q^2}{1 \cdot 2} \sin p - \frac{q^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos p + \dots$$

$$\cos(p+q) = \cos p - q \sin p - \frac{q^2}{1 \cdot 2} \cos p + \frac{q^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin p + \dots$$

welche Reihen nichts anders als Entwicklung des \sin nach Potenzen q sind.

Es seien nemlich

$$\frac{\sin(p+q) - \sin p}{\cos p} = u, \text{ und } \frac{\cos(p+q) - \cos p}{\sin p} = u'$$

so hat man

$$u = q - \frac{q^2}{1 \cdot 2} \cos p - \frac{q^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{q^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos p + \dots$$

$$u' = q - \frac{q^2}{1 \cdot 2} \sin p + \frac{q^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{q^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \sin p - \dots$$

Durch die Entwicklung der Reihen wird wegen

$$q = u + \frac{\cos p}{1 \cdot 2} u^2 + \frac{1 + 3 \cos^2 p}{1 \cdot 2 \cdot 3} u^3 + \frac{q \cos p + 15 \cos^3 p}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} u^4 + \frac{q + 9 q \cos^2 p + 105 \cos^4 p}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} u^5$$

$$-q = u' + \frac{\sin p}{1 \cdot 2} u'^2 + \frac{1 + 3 \sin^2 p}{1 \cdot 2 \cdot 3} u'^3 + \frac{q \sin p + 15 \sin^3 p}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} u'^4 + \frac{q + 9 q \sin^2 p + 105 \sin^4 p}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} u'^5$$

zweier A und B zwei Bogen deren Unterschied nicht groß ist

$$\text{und sey } u = \frac{\sin A - \sin B}{\cos B}, \text{ wenn man in diesen Rei-}$$

hen $q = A - B$ setzt, so erhält man

$$A - B = u + \frac{\cos B}{1 \cdot 2} u^2 + \frac{1 + 3 \cos^2 B}{1 \cdot 2 \cdot 3} u^3 + \frac{q \cos B + 15 \cos^3 B}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} u^4 + \dots$$

und eben so wenn man $v = \frac{\sin A - \sin B}{\cos A}$ setzt

$$A - B = v - \frac{\cos A}{1 \cdot 2} v^2 + \frac{1 + 3 \cos^2 A}{1 \cdot 2 \cdot 3} v^3 - \frac{q \cos A + 15 \cos^3 A}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} v^4 + \dots$$

Wenn $\frac{\cos A - \cos B}{\sin B} = u'$ und $\frac{\cos A - \cos B}{\sin A} = v'$, so gibt

die zwei Reihen

$$B-A = v \cdot \frac{1}{1^2} A \dot{v}^1 + \frac{1+3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} A \dot{v}^3 + \frac{9 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} A \dot{v}^4 + \dots$$

$$\frac{e^{x_{k-1}} e^{-x_{k-1}}}{e^{x_{k-1}} + e^{-x_{k-1}}} = \frac{m e^{y_{k-1}} m e^{-y_{k-1}}}{e^{y_{k-1}} + e^{-y_{k-1}}} \quad \text{mit } k \text{ beliebig}$$
$$\frac{e^{2\gamma_{k-1}} - 1}{e^{2\gamma_{k-1}} + 1} = \frac{m e^{2\gamma_{k-1}} - m}{e^{2\gamma_{k-1}} + 1} \quad \text{g. l. i. c. h. i. f. t.}$$
$$e^{2\gamma K_1} = \frac{1 + \frac{1-m}{1+m} e^{-2\gamma K_1}}{e^{-2\gamma K_1} + \frac{1-m}{1+m}} = e^{2\gamma K_1} \frac{1 + \theta e^{-2\gamma K_1}}{1 + \theta e^{2\gamma K_1}}$$
$$x - y = -\theta \sin y + \frac{\theta^2}{12} \sin 4y - \frac{\theta^3}{3} \sin 6y + \frac{\theta^4}{41} \sin 8y \text{ etc}$$

Siehe vorzüglich Werke von Euler und
unflexiblen Geometrie Lagrange.

Der Taylor'sche Satz gibt ein sehr einfaches Mittel die Functionen in Reihen aufzulösen. Setzt man eine Function $f(x)$ durch y vor, so hat man

$$f(x+h) = y + \frac{\partial y}{\partial x} h + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \dots$$

Setzt man in dieser Reihe $x=0$ und bezeichnet durch y, y', y'' etc. die Größen in welche $y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ etc. in dieser Hypothese übergehen so erhält man

$$f(h) = y + y' h + y'' \frac{h^2}{1.2} + y''' \frac{h^3}{1.2.3} + \dots$$

Schreibt man jetzt für h, x , was in den Functionen y, y', y'' keine Änderung verursacht, kann diese Functionen diesen Buchstaben nicht enthalten so wird man haben:

$$f(x) = y + y' x + y'' \frac{x^2}{1.2} + y''' \frac{x^3}{1.2.3} + \dots$$

13. In jeder Entwicklung nach dieser Formel muß in y und in seinen differentiellen Coefficienten $x=0$ gesetzt werden.

Euler's Methode der Polynomen von der Form $(x + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4 \dots)^m$ zu entwickeln. Er hat die wiederholte Differentiation mit der Methode der unbestimmten Coefficienten combinirt, auf folgende Art:
 setzt man

$$(x + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4 \dots)^m = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 \dots$$

Nimmt man jetzt das logarithmische Differential von beiden Seiten und dividirt durch dx so erhält man:

$$\frac{m(\beta + 2\gamma x + 3\delta x^2 + 4\epsilon x^3 \dots)}{x + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4 \dots} = \frac{B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 \dots}{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 \dots}$$

Lässt man die Nenner verschwinden und vergleicht die Glieder die dieselbe Potenz von x multiplizieren, so erhält man Gleichungen um die Coefficienten A, B, C, \dots zu bestimmen.

$$x^m = 1 + \log a \cdot m + \frac{1}{1.2} (\log a)^2 m^2 + \frac{1}{1.2.3} (\log a)^3 m^3 + \dots$$

$$e = 2.71828 18284 59645 23536 02874 71352 66250$$

$$\frac{1}{e} = 0.3678794411 71442 32159 55237 70161 \dots$$

$$e^2 = 7.38905 60989 30650 72773$$

$$\frac{1}{e^2} = 0.13533 57832 36612 69189$$

$$e^3 = 20.08553 69231 87667 74092$$

$$\frac{1}{e^3} = 0.04978 70683 67863 94297$$

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$\sin 5x = 5 \sin x - 20 \sin^3 x + 16 \sin^5 x$$

$$\sin 7x = 7 \sin x - 56 \sin^3 x + 112 \sin^5 x - 64 \sin^7 x$$

$$\begin{aligned} \sin nx = & n \sin x - \frac{n(n^2-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin^3 x + \frac{n(n^2-1)(n^2-3^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \sin^5 x - \\ & - \frac{n(n^2-1)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \sin^7 x + \dots \pm 2^{n-1} \sin^n x \end{aligned}$$

$$\cos 3x = \cos x (1 - 4 \sin^2 x)$$

$$\cos 5x = \cos x (1 - 12 \sin^2 x + 16 \sin^4 x)$$

$$\cos 7x = \cos x (1 - 24 \sin^2 x + 80 \sin^4 x - 64 \sin^6 x)$$

$$\begin{aligned} \cos nx = & \cos x \left(1 - \frac{n^2-1}{1 \cdot 2} \sin^2 x + \frac{(n^2-1)(n^2-3^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \sin^4 x - \right. \\ & \left. - \frac{(n^2-1)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \sin^6 x + \dots \pm 2^{n-1} \sin^{n-1} x \right) \end{aligned}$$

Im den zwei vorhergehenden Theilen gilt das obere
Theil, wenn $\frac{n-1}{2}$ eine ungerade Zahl ist, sonst das untere

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\sin 4x = (4 \sin x - 4 \sin^3 x) \cos x$$

$$\sin 6x = (6 \sin x - 32 \sin^3 x + 32 \sin^5 x) \cos x$$

$$\begin{aligned} \sin nx = & (n \sin x - \frac{n(n^2-2^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin^3 x + \frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \sin^5 x - \\ & - \frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \sin^7 x + \dots \mp 2^{n-1} \sin^{n-1} x) \cos x \end{aligned}$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\cos 4x = 1 - 8 \sin^2 x + 8 \sin^4 x$$

$$\cos 6x = 1 - 18 \sin^2 x + 48 \sin^4 x - 32 \sin^6 x$$

$$\cos nx = 1 - \frac{n^2}{1 \cdot 2} \sin^2 x + \frac{n^2(n^2-2^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \sin^4 x -$$

$$- \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \sin^6 x + \dots \pm \frac{2^{n-1}}{n!} \sin^n x$$

Bei diesen zwei vorhergehenden Reihen
gilt das obere Zeichen wenn $\frac{n}{2}$ eine gerade
Zahl ist.

$$\lg 2x = \frac{2 \lg x}{1 - \lg^2 x}$$

$$\lg 3x = \frac{3 \lg x - \lg^3 x}{1 - 3 \lg^2 x}$$

$$\lg 4x = \frac{4 \lg x - 4 \lg^3 x}{1 - 6 \lg^2 x + \lg^4 x}$$

$$\lg 5x = \frac{5 \lg x - 10 \lg^3 x + \lg^5 x}{1 - 10 \lg^2 x + 5 \lg^4 x}$$

$$\lg nx = \frac{A}{B} \text{ wo}$$

$$A = n \lg x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \lg^3 x + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \lg^5 x - \dots$$

$$\dots \pm n \lg^{n-1} x$$

$$\pm \lg^n x$$

$$B = 1 - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \lg^2 x + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \lg^4 x - \dots$$

$$\pm \lg^{n-2} x$$

$$\pm n \lg^{n-2} x$$

52

Hier gilt das obere Glied wenn n eine gerade Zahl ist, das untere wenn n ungerade, und das obere Zeichen wenn im ersten Falle $\frac{n}{2}$, im zweiten $\frac{n-1}{2}$ gerade ist, das untere aber wenn Gegenheil ist.

$$\lg x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{3 \cdot 5} + \frac{17x^7}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3} + \frac{62x^9}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 3} + \frac{1382x^{11}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 5} + \dots$$

$$x = \sin x + \frac{\sin^3 x}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \sin^5 x}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \sin^7 x}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \sin^{2n+1} x}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n(2n+1)} + \dots$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \left\{ \cos x + \frac{\cos^3 x}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cos^5 x}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \dots \right.$$

$$\left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \cos^{2n+1} x}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n(2n+1)} + \dots \right\}$$

$$x = \lg x - \frac{1}{3} \lg^3 x + \frac{1}{5} \lg^5 x - \frac{1}{7} \lg^7 x + \dots \pm \frac{1}{2n+1} \lg^{2n+1} x \mp \dots$$

$$x - \text{horiz. } x = \frac{x^3}{4 \cdot 6} - \frac{x^5}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \frac{x^7}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14} - \dots$$

$$= -\frac{\sin^3 \frac{x}{2}}{3} + \frac{1 \cdot 3 \sin^5 \frac{x}{2}}{4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \sin^7 \frac{x}{2}}{4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$$

$$x - \text{vert. } x = \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} - \dots$$

$$= \frac{\sin^3 x}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \sin^5 x}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \sin^7 x}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$$

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots\right)$$

Setzt man $\frac{1+x}{1-x} = \frac{Z^2}{Z^2-1}$ und daraus $x = \frac{1}{Z^2-1}$

so findet man

$$\log Z = \frac{\log(Z+1) + \log(Z-1)}{2} + \frac{1}{2Z^2-1} + \frac{1}{3(2Z^2-1)^3} + \dots$$

Nimmt man die Reihe $\frac{1}{2Z^2-1} + \frac{1}{3(2Z^2-1)^3} + \dots = P_2$

so bekommt man

$$\log Z = \frac{\log(Z+1) + \log(Z-1)}{2} + P_2$$

Es ist z. B.

$$\log 2 = \frac{\log 3}{2} + P_2 \quad \text{und daraus} \quad \log 2 = 2(P_2 + P_3)$$

$$\log 3 = \frac{3}{2}\log 2 + P_3 \quad \log 3 = 2(3P_2 + 2P_3)$$

$$P_2 = \frac{1}{7} + \frac{1}{3 \cdot 7^3} + \frac{1}{5 \cdot 7^5} + \dots$$

$$P_3 = \frac{1}{17} + \frac{1}{3 \cdot 17^3} + \frac{1}{5 \cdot 17^5} + \dots$$

Man weiß, daß

$$\begin{aligned} \log(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots \\ &= -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots\right) \end{aligned}$$

für $x=0$ bekannt war

$$\log 0 = -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots\right)$$

weil aber $\log 0 =$ dem negativen Unendlichen

so hat man einen Beweis, daß die harmonische Reihe in der That eine unendliche Größe ist

Nennt man S die Summe der harmonischen Reihe oder setzt man

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

so wird

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots \quad (\alpha)$$

da also die Summe der Glieder mit geraden Nennern $\frac{1}{2}S$ gleich der Hälfte der Summe S , so müssen die Glieder mit ungeraden Nennern die andere Hälfte ausmachen, oder es wird auch

$$\frac{1}{2}S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots \quad (\beta)$$

Zieht man (α) von (β) , so wird

$$0 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

$$\text{aber } \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

welcher im Falle $x=1$ in folgendes übergeht

$$12 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

woraus würde folgen

$$\log 2 = 0$$

Dieser Aufsinn schreiet sich daher, daß man die Ergänzungen in den vorigen Reihen nicht berücksichtigt hat, und waars uns zugleich wie es ~~mit~~ gefährlich ist bei den Reihen Fehlschlüsse zu machen. Ohne die Natur der Functionen zu kennen. —

$$2^{n-1} \cos x^n = \{ \cos nx + \binom{n}{2} \cos(n-2)x + \binom{n}{4} \cos(n-4)x + \dots + \binom{n}{3} \cos(n-6)x + \binom{n}{5} \cos(n-8)x + \dots \}$$

Diese Formel setzt man so lange fort bis man auf den Bogen = 0 kommt und wenn n eine gerade Zahl ist, nimmt man nur die Hälfte des Coeff. (Koeffizienten) von diesen Bogen. So bekommt man

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos x \\ 2 \cos x^2 &= \cos 2x + 1 \\ 4 \cos x^3 &= \cos 3x + 3 \cos x \\ 8 \cos x^4 &= \cos 4x + 4 \cos 2x + 3 \\ 16 \cos x^5 &= \cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x \\ 32 \cos x^6 &= \cos 6x + 6 \cos 4x + 15 \cos 2x + 10 \\ 64 \cos x^7 &= \cos 7x + 7 \cos 5x + 21 \cos 3x + 35 \cos x \end{aligned}$$

$$\pm 2^{n-1} \sin x^n = \{ \cos nx - \binom{n}{2} \cos(n-2)x + \binom{n}{4} \cos(n-4)x - \binom{n}{6} \cos(n-6)x + \dots \}$$

Diese Formel gilt für den Fall, wenn n eine gerade Zahl ist und das obere Zeichen wenn n ein Vielfaches von 4, das untere aber wenn n ein Vielfaches von 2 ist.

Für den Fall wo n eine ungerade Zahl ist, ist folgende Formel

$$\pm 2^{n-1} \sin x^n = \{ \sin nx - \binom{n}{2} \sin(n-2)x + \binom{n}{4} \sin(n-4)x - \binom{n}{6} \sin(n-6)x + \dots \}$$

Das obere Zeichen wenn $n-1$ ein Vielfaches von 4 und das untere wenn

⁵⁶
 $n-1$ ein arithmetisches von 2 ist. Auf die Art bekommt man

$$\sin x = \sin x$$

$$2 \sin x^2 = -\cos 2x + 1$$

$$4 \sin x^3 = -\sin 3x + 3 \sin x$$

$$8 \sin x^4 = \cos 4x - 4 \cos 2x + 3$$

$$16 \sin x^5 = \sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x$$

$$32 \sin x^6 = -\cos 6x + 6 \cos 4x - 15 \cos 2x + 10$$

$$64 \sin x^7 = -\sin 7x + 7 \sin 5x - 21 \sin 3x + 35 \sin x$$

u. s. w.

Um in der arithmetischen Reihe

$1^m, 2^m, 3^m, 4^m, \dots, n^m$ der Ordnung m die Summenformel zu finden, setzt man

$$S(n^m) = 1^m + 2^m + 3^m + 4^m + \dots + n^m$$

$$= P_1 n^{m+1} + P_2 n^m + P_3 n^{m-1} + \dots + P_{m+1} n$$

Schreibt man in dieser Reihe $n+1$ statt n so wird man haben

$$1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m + (n+1)^m =$$

$$= P_1 (n+1)^{m+1} + P_2 (n+1)^m + P_3 (n+1)^{m-1} + \dots + P_m (n+1)^2 + P_{m+1} (n+1)$$

und wenn man von dieser Gleichung die vorige abzieht

$$(n+1)^m = P_1 \{(n+1)^{m+1} - n^{m+1}\} + P_2 \{(n+1)^m - n^m\} + \dots + P_{m+1} \{(n+1) - n\}$$

oder wenn man entwickelt und alles nach n ordnet, so bekommen wir durch die Vergleichung der Coefficienten

$$P_1 = \frac{1}{m+1}, P_2 = \frac{1}{2}, P_3 = \frac{m}{12}, P_4 = 0, P_5 = 0 \text{ etc.}$$

Die letzte Vergleichung der Coefficienten von n^0 d. h.

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \dots + P_{m+1} = 1$$

kann zur Verifikation der gefundenen Coefficienten dienen.

Substituiert man die so gefundenen Werte für P_1, P_2 etc. in der obigen Gleichung, so bekommt man

$$S(n^m) = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{1}{2}n^m + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \binom{m}{1} n^{m-1} - \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{4} \binom{m}{2} n^{m-2} + \frac{1}{42} \cdot \frac{1}{6} \binom{m}{3} n^{m-3} \\ - \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{8} \binom{m}{4} n^{m-4} + \frac{1}{66} \cdot \frac{1}{10} \binom{m}{5} n^{m-5} \dots$$

Diese Reihe wird so weit fortgesetzt als es möglich ist ohne dass der Exponent von n kleiner als $+1$ wird.

Die Zahlen $\frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}$ etc. heißen Bernoullische Zahlen weil sie zuerst von Jakob Bernoulli angegeben wurden. — Wenn man sie durch B_1, B_2, B_3, \dots bezeichnet, so ist

$$B_1 = \frac{1}{6}, B_2 = \frac{1}{30}, B_3 = \frac{1}{42}, B_4 = \frac{1}{30}, B_5 = \frac{1}{66}, B_6 = \frac{691}{2730}$$

Das Gesetz dieser Zahlen ist zuerst von Moivre aufgefunden worden, und besteht in den folgenden Gleichungen

$$3B_1 = \frac{1}{2}, 5B_2 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 1}{1 \cdot 2} B_1, 7B_3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 2}{1 \cdot 2} B_1 B_2, \\ 9B_4 = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} \cdot 2 B_1 B_3 + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} B_2^2 \\ 11B_5 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} \cdot 2 B_1 B_4 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 2 B_2 B_3, \\ 13B_6 = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} \cdot 2 B_1 B_5 + \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 2 B_2 B_4 + \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} B_3^2$$

Wenn A die Länge eines Bogens von a° oder a' oder a'' bedeutet, so erhält man sehr schnell und leicht diese Länge nach folgenden Formeln

$$\text{Länge } A = \text{Länge } a^\circ - 1.758622632409172215482526 \\ \text{Länge } A = \text{Länge } a' - 3.536273882742875847961293 \\ \text{Länge } A = \text{Länge } a'' - 5.314425733176459480470060$$

$$\text{d. h. } A = \frac{a^\circ \pi}{180} = \frac{a' \pi}{180.60} = \frac{a'' \pi}{180.60.60} \text{ für den Halbmess}$$

$$\text{r} = 1.$$

0.621 Tage beträgt, erst nach 300 Jahren nahe einen Tag.
 Man nennt diese neunzehnjährige Periode Mondszykel
 und die Zahl welche anzeigt das wievielle in gegebenem Jahr
 in dieser Periode ist, die goldene Zahl, die für beide Kalender
 der Julianischen und Gregorianischen dieselbe ist und nach
 1900 Jahre periodisch wiederkehrt. Das erste Jahr die
 1. Periode war das unmittelbar vor Christi Geburt, daher
 wird für jedes gegebene Jahr d die goldene Zahl gefunden
 indem man $d+1$ mit 19 dividirt, der Rest dieses Divisi-
 on ist die gesuchte goldene Zahl. — Die Gregorianischen Ephe-
 ren sind für die Jahre vom 1700 bis 1800 um 11 von 1800-1900
 um 11 von 1900 bis 2200 um 12 Tage kleiner. Die Ursache
 davon ist die Reform in 1582 wo man 10 Tage weggewomen
 hatte.

Um den Ostersonntag zu finden, sey das gegebene Jahr
 A , ^{Reste von d getheilt mit 4, 5, 7, 11, 19} man $\frac{A}{19} \# \&$, $\frac{A}{4} \# \&$, $\frac{A}{7} \# \&$, $\frac{m+19a}{30} \# \&$ und addirt
 $m+2b+4c+6d \# \&$, so ist immer der Ostersonntag der
 $(22+d+e)$ te März oder der $(d+e-9)$ te April.

Im Julianischen Kalender ist immer $m=15$ und $n=6$.
 Für den Gregorianischen muss man nach folgendes bemer-
 ken. Wenn die Rechnung für den Ostersonntag den 26. April
 gibt, so muss man immer den 19. April nehmen, und für den
 25. April muss man den 18. April nehmen wenn $d=28$ und
 $a > 10$ ist. Endlich im Gregorianischen Kalender ist

von	m	n	
1700-1799	23	3	Ostern waren 22. März und 25. April
1800-1899	23	4	
1900-1999	24	5	

Der Durchmesser der Sonne = Durchgang durch den Meridian X
 15. Lin. 10. P. 10. P.
 1 + 86.100

100" ist die Schatt. der Zeit-Sunden die die Sonne über 24
 Stunden in zwei Durchgängen der Sonne durch den Meri-
 dian gemacht hat. —

1800-1900

des Urparks
gegessen

des Tahr
a, b, c, d, e
und und
des

nd H=6.
des beamer

des 26. April
und für den
d=28 und
des ist
25. April

Maonijpe epoli

	<u>pro the. scide</u>	<u>pro the. scide</u>	<u>pro the. scide</u>
Panorjia p. aurodora	1809	2174	2539
Panorjia aurodora	2426	1567	3156
Myjia a. Lijpka	2453	1530	3183
Myjia a. Lijpka	2800	1183	3530
Budowa Monista Salomona	2972	1011	3702
Pierwpe Olimpijate	3208	775	3938
Lutorenica Parym	{3230}	{753}	3960
	{3232}	{751}	
Epoka Ptolemajpaw	3237	746	3967

Wiedzy lekshu hebrajskiego biblia, v. Panorenica p. aurodora
de Chrystusa, a p. tynzto lat 4604
wiedzy lekshu samarytanstawa --- 4700
wiedzy Ptolemajpaw --- 5872
wiedzy inmyl Ptolemajpaw --- 5963

Aby znaleźć na jaki dzień tygodnia przypada pewna data t.j. pierwszy
 dzień roku, potrzeba obrać sobie

$$P = N + \frac{N-1}{4} + d + 5$$

gdzie N ma być liczba wyrażająca rok w którym mamy dzień / rok
 a reszta z dzielenia $\frac{N-1}{4}$ wypadająca sumuje się. Tak otrzymamy
 P dzień tygodnia, który jest porządku reszty

$r = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0$, dzień odpowiednio Niedziela, Poniedziałek,
 Wtorek, Środa, Czwartek, Piątek, Sobota. & d. największe się bierze

tabelo z następującymi tablicami

	Lp	Mar	Kwie	Maj	Czer	Lip	Sierp	Wrze	Poz	Lut	Gru
Rok wypr.	31	59	90	120	151	181	212	243	273	304	334
— przel.	31	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335

Przykład Jakim był dzień tygodnia 24. Marca 1794?

$$\begin{aligned}
 N &= 1794 & P &= \frac{2330}{7} = 332 + \frac{6}{7} \quad \text{t.j. } r=6 \\
 \frac{N-1}{4} &= 448 & \frac{6}{7} &= \frac{6}{7} \\
 d &= 83
 \end{aligned}$$

zatem dzień 24. Marca 1794 roku

$$P = 2330$$

był Piątek w Juliuszian Kalendarzu, zaś
 w Gregorjan — Czwartek

W Gregorjan — stylu obrać sobie

$$P = \left(N + \frac{N-1}{4} + \frac{N-1}{100} + \frac{N-1}{400} + d \right) - \left(\frac{N-1}{100} + \frac{N-1}{400} \right)$$

gdzie N ma być rok, a reszta z dzielenia sumuje się, po czym r i dzień tygodnia największe się bierze

Um den Sonntagsbuchstaben zu finden, dient fol-
gende Gleichung dazu:

$$d = \frac{d + e + 4}{7}$$

in welcher d und e die vorige Bedeutung behalten
 d = dem Reste aus der Division $m + 19a$, e = dem Reste
aus der Division $m + 26 + 41c + 6d$ haben. In dieser
Gleichung bemerkt man bloß den Rest r von
der Rest $r = 0$ so ist der Sonntagsbuchstabe A .

$r = 1$	-----	A
$r = 2$	-----	B
$r = 3$	-----	C
$r = 4$	-----	D
$r = 5$	-----	E
$r = 6$	-----	F

Ist das Jahr ein Schaltjahr, so hat man vor den
gefundenen Buchstaben noch diesen nachfolgenden
zu setzen der für den Winter und bis zum 24. Febr.
dienen wird und von da an auf die obige Art
gefunden.

Der Astronom ist sehr oft genöthigt die
chronologischen Daten mit einander zu vergleichen
und das eine in das andere zu verwandeln. Dies geschieht
am bequemsten auf folgende Weise.

Es sey allgemein genommen, in einer Periode deren Anfang
in das Jahr a der christlichen Zeitrechnung fällt, und die
von Jahreslänge L ist, das Jahr M und der Tag in dieses
Jahr gegeben, so kann man das diesen Daten entspre-
chende Jahr M' einer andern Periode, deren Anfang in das
Jahr a' der christlichen Zeitrechnung fällt und in der
die Länge des Jahres L' ist, durch die Gleichung

$$M' = 365,25(a' - a) + (M - 1)L + (M - 1) \quad (1)$$

bestimmen.
Die Epoche der französischen Revolution hängt von 22. Sept.
des Jahres 1792. an. Das Jahr bestand aus 365 Tagen in 12. Mo-
nate zu 30 Tagen getheilt, wozu noch 5 Tage grüne Tage
monstruös hinzugefügt. Diese Zeitrechnung, welche 1792
mit 1793 begann, also das Jahr 1806 ansetzt, weicht mit 1792
an.

Die vornehmsten Perioden, ihre Anfang im Julianischen Kalender, und ihre Fabelnänge sind folgende

Christliche Periode... Anfang im Julian. Kal.	0.000	Long 8. 24
Aphelaleidische	-1078.195	365 $\frac{1}{4}$ 7
Diocletianische	-283.660	365 $\frac{1}{4}$ 3
Erbauung Roms	+311.250	365 $\frac{1}{4}$
Vergewaltigung	+631.459	365 $\frac{1}{4}$
Julianische	+4713.000	365 $\frac{1}{4}$
Mahomedanische	-621.538	354 $\frac{11}{30}$
Schmeidische	+754.000	365 $\frac{1}{4}$
Welterschöpfung nach Euseb. Hieron.	+5199.334	365 $\frac{1}{4}$
... nach d. Const. Aere	+5808.334	365 $\frac{1}{4}$

Im künftigen Kommt wohl der Fall vor, zu erforschen auf welcher der Daten, unserer christlichen Zeitrechnung irgend eine gegebene Epoche eines andern Periode fällt. Hier gilt die Gleichung

$$M' = -\alpha + 0.00273785 \{ (M-1)L + (m-1) \} \quad (2)$$

in der M und m das gegebene Jahr und dazugegebene Tag der Periode M' aber das entsprechende Datum der christlichen Zeitrechnung ist. Auf die Art wird es seyn für die Aphelaleidische Periode

$$M' = +1078.192 + 0.999979M + 0.00273785m$$

$$\text{für Erbauung Roms } M' = -755.003 + M + 0.00273785m$$

$$\text{Vergewaltigung } M' = +630.4157 + 0.9999315M + 0.00273785m$$

$$\text{Mahomedanische } M' = +620.568 + 0.970263M + 0.00273785m$$

$$\text{Schmeidische } M' = -312.253 + M + 0.00273785m$$

Um ein Julianisches Datum durch das einer andern Zeitrechnung auszu drücken, kann man folgende Gleichung anwenden

$$M' = 365.25 \frac{(a' + M - 1) + (m - 1)}{L}$$

die für verschiedene Perioden numerisch in der Form

$$M' = \alpha + \beta M + \gamma m$$

entwickelt werden kann. So ist z. B. für die kürzeste Periode in welcher $\alpha' = -621.538$ und $L = 354 \frac{11}{30}$

$$M' = -641.656 + 1.030712M + 0.0028219m$$

June.

Mittlere Entfernung der Sonne von der Erde.

$A = 23984$ Halbmesser der Erde.

Tägliche mittlere Bewegung in der Zeitgleichung

$$= 59' 8'' 5299$$

Die größte Mittelpunktsgleichung

nach Delambre = $1^{\circ} 55' 26''.8$

new Laplace = 1,5577.3

Dauer der Rotation der Sonne = 25 $\frac{1}{2}$ Tage

Die Axe der Sonne ist $7^{\circ} 30'$ gegen den der
Ecliptik geneigt. —

Mittlere Sonnenparallele

nach Laplace = $8.66 - 7 \cdot 8.591$ Litron

nach Encke $\tau = 8.5776$ und nach Bessel

Scheinbaren Halbmessers der Sonne wenn die Erde

im Perihel ist $= 32' 34'' 6$

in. Appleb. 31 3/4

2. Lf. mit kleiner Halbm. $\text{L} = 32' 2'' 11'' 8$

Wahres Durchm. der Sonne ist = $\frac{112.06}{111.454}$ No 1

mittleres Durchmesser der Zelle 1:109,25 Erdurchmesser

Also Körperlicher Inhalt 1384472 Mal größer
als der der Erde. - 3468 Billionen Cub. Meilen

354936 Mehl größer als
die des Brod.

die der Erde. —
Ein Körper der unter dem indischen Äquator liegt ^{niedrig}
ein ^{wenig} flacher dem der Sonne liegt ^{auf 28.36} 28.36 flacher
und die Körper flachen dort 334.65 Fuß herum in der ersten
Tausende. — 1428 Par. Fuß ^{Höhepunkt} ^{Äquator}

Mercur Durchmesser des Merkurs = 600 d. Merkur
Mittlere Entfernung von der Sonne

= 0.3870981, die der Erde = 1 gesetzt.

Umschleife Revolution = 87.969258 Sonnen Tage

Synodische - - - 115.877 mittlere Sonnen Tage

Mittlere Bewegung in seiner Bahn = $12^{\circ} 5' 32.6''$

Neigung seiner Bahn gegen die Ekliptik = $7^{\circ} 0' 9''$

und um 0.1818 nimmt jährlich zu

Die Excentricität Merkurs Bahn = 0.20561494 die
halbe große Ase = 1 angenommen

Größte Mittel punktgleichung = $23^{\circ} 39' 51''$ und
die Seculäre Zunahme = $+1.6''$

Dauer seiner Rotation = $24^h 5^m 28.3^s$

Wahrer Durchmesser = 0.398 der der Erde = 1

Körperlicher Inhalt = 0.063

Die Körper die auf der Erde wiegen ein Pfund
wiegen, wenn sie auf dem Merkur 1.03 Pfund

Elongation ändert sich von $16^{\circ} 12'$ bis $28^{\circ} 48'$

Im ersten Mal wurde der Durchgang ^{vor dem Merkur} wahres Sonnen
schleife von Gassendi im November 1631 beobachtet

Für einige Jahrhunderte kann diese Erscheinung nur im
May oder November beobachtet werden. und so wird haben

* 1832 May 5	* 1878 May 6
1835 Novemb 7	1881 Novemb 7
* 1845 May 8	1891 May 9
* 1848 Novemb 9	1894 Novemb 16
* 1861 Novemb 11	1901 Novemb 11
* 1868 Novemb 14	

Die mit * bezeichneten werden in unseren Gegenden
sichtbar

Venus Durchmesser der Venus = 1678 Durchmesser Merkur ⁵⁸

Mittlere Entfernung von der Sonne

= 0.7233316 die der Erde = 1

sidrische Revolution = 224.700 7869 Tage

Synodisch = 583.920 Tage

Mittlere Bewegung in der Bahn = $1^{\circ} 36' 7''.8$

Näherung der Bahn gegen die Ekliptik = $3^{\circ} 23' 28''.5$

jährliche Abnahme = $0''.0455$

Excentricität = 0.00686054 halbe große Achse = 1

Größte Mittelpunktgleichung = $0^{\circ} 47' 15''$ mit

jährlichen Abnahme $8''.25$

Dauer ihrer Rotation = $23^h 21' 7''.2$ 23^h 23^m 9^s

Scheinbarer Halbmesser = $16''.9$ und ändert sich zwischen $9''.6$ bis $64''.2$

Wahrer Durchmesser = 0.979 der der Erde = 1

Körperlicher Inhalt = 0.924 $v = v$

Körper die bei uns ein Pfund wiegen, wiegen sie auf der Venus nur 0.928 Pfund

Ihre Elongation zwischen 45° und $47^{\circ} 12'$

Durchgang der Venus über Sonnen Scheitel
Nur bloß im Juni und December für einige
Tausenderte Male haben, und so

1874	Juni 8
1882	Decem 6
2004	Juni 7
2012	Juni 16
2117	Decem 10
2125	Decem 8
2247	Juni 11
2255	Juni 8

ide

Äquatoriale Revolution = $365^{\circ} 6' 9'' 6$
Tropische — — — — — $365^{\circ} 5' 48'' 49.7$
Das anomalistische Jahr = $365^{\circ} 6' 13'' 49.3$ nach Laplace
Lunar Solar Revolution = $50^{\circ} 41'$ in einem Jahre
und allgemeine Revolution in der Länge = $50^{\circ} 10'$

Periode der Revolution der Epigynachsen = 28858^{Jahre}
Excentricität der Ecliptik = 0.016783568 die
halbe große Axe = 1

Verhältnisse der Asten $1:0.99986$
Von Tullius des Hipparchus bis jetzt hat sich
um $0''.003$ die Zeit der Revolution der Erde geändert.

Ältere Sonnentag = $24^{\text{h}} 3' 56''.555$ Sonnenzeit
Stemtag = $23^{\text{h}} 56' 4.09$ mittlerer Zeit
oder allgemein

Stemzeit = $1.00273791 \times$ Mittlere Sonnenzeit
Mittlere Sonnenzeit = $0.99726967 \times$ Stemzeit

Die Dichte der Erde = 3.9326 Mal größer als die
der Sonne und zur Dichte des Wassers ist sie $11:2$
Schwerkraft unter dem Äquator = 1 gesetzt
muss oft für jeden andern Ort diese Schwere
= 0.00539 in $^{\circ}$ $^{\circ}$ der Breite

Länge eines Pendels unter dem Äquator
so oft für jeden andern Ort sehr nahe

Länge des Sekunden-Pendels = $p(1 + 0.00539 \sin^2 \varphi)$
~~Mittlere Halbmesser der Erde = 2266.611 Meilen~~

Länge eines jeden Grades der Breite ist = $\frac{36}{c} \sin 2\phi$
 wo c das Verhältniß der Breiten und d die Länge
 eines Grades unter dem Äquator bedeutet. -
 Die Centrifugalkraft = 0.00346 der Schwere.
 Ein Körper der unter dem Äquator 1 wüch
 seine Schwere unter der Polhöhe $\phi = 1 + 0.00346 \sin^2 \phi$
 Das Licht von der Sonne kommt zu uns in
 8' 13" 3 in welcher Zeit macht die Erde 20" 25
 in ihrer Bahn, daher die Aberration

Das tropische Jahr = 365^d 5^h 48' 52"
 siderische -- = 365 6 9 12 { Unterschied
 anomalistische = 365 6 13 58.8

Schiefen der Ekliptik für irgend einen Tag
 des Jahres ist

$$\omega = \frac{n \cdot 0.52}{365} + 0.4345 \cos 20 + 0.648 \cos 2\phi$$

w ist die Schiefe der Ekliptik für den 1. Jänner
 n der Tag des Jahres für welchen die Schiefe
 der Ekliptik gesucht wird.

Fallraum in einer Secunde = 15.11 Paris Fuß.

Durchmesser der Erde = 1719 deutsche Meilen

Durchmesser des Erdbahns = 42 Mill. deutscher Meilen

Mars

Mittlere Entfernung von der Sonne ist 1.5236923
die der Erde 1. (Jahr 322 Tage 17 Stunden)

Siderische Revolution = 686.9796458 Sonnen Tage
Synodische 779.936

Mittlere Bewegung in seiner Bahn = $31' 26'' 66$

Neigung der Bahn = $1^{\circ} 51' 6'' 2$ die um $0''.014$ in
einem Jahre abnimmt.

Die Excentricität = 0.0933070

Die größte Mittelgleichung = $10^{\circ} 40' 56''$ die um
 $6''.37$ in einem Jahre zunimmt.

Dauer der Periode 21 $1^{\circ} 39' 21'' 3$

Seine Parallaxe ist sehr nahe die zweifache
der Sonne.

Scheinbarer Durchmesser in seiner mittleren
Entfernung von der Erde = $6''.24$.

Die größte = $18''.28$

Kleinste = $3''.60$

Der Körper der hier auf der Erde ein Pfund wiegt
wiegt er auf dem Mars nur $\frac{1}{3}$ Pfund

Umlaufzeit = 1 Jahr und 322 Tage

Durchmesser des Mars = 1000 deutsche Meilen

Durchmesser der Marsbahn = 64 Mill. deutsche Meilen

Vesta

61

1.5236923
(Länge)
kommen Tage
"66
"014 in
"di von

Von Dr. Olbers am 29. März 1807 entdeckt

Mittlere Entfernung von der Sonne = 2.367876

Jördische Revolution = 1925 ^{3 Jahre 345 Tage} 7431 Sonnenstage
Synodisch = 503.41

Mittlere Bewegung = 16" 17' 9516

Neigung ihrer Bahn = 7° 8' 9" und in einem
Jahre von 0" 12 abnimmt nach Lambert

Die Excentricität = 0.089130

Die größte Mittelpunktgleichung = 10° 13' 22"

Juno

Laure
mittleren
mit 6

Von Harding am 1. September 1804 entdeckt

Mittlere Entfernung von der Sonne = 2.669009

Jördische Revolution = 1592 ³ 6608 4 Jahre 126 Tage
Synodisch = 473.95

Mittlere Bewegung = 13' 32" 9304

Neigung = 13° 4' 9" 7

Die Excentricität = 0.257848

Die größte Mittelpunktgleichung = 20° 46' 19"

Umlaufzeit der Vesta 3 Jahre und 240 Tage
--- der Juno 4 --- 131

Durchmesser der Vesta = 59 deutsche Meilen.
--- der Juno = 308

Durchmesser der Vesta Bahn = 98 Mill. d. M.
--- der Juno Bahn = 110

2 Meilen
die Meilen

Ceres

Von Piazzi den 1. Januar 1801 entdeckt

Mittlere Entfernung von der Sonne = 2.767 245

Siderische Revolution = 1681.3931 Sonnenlage

Synodische ——— 466.62

Mittlere Bewegung = $12^{\circ} 50' 23''$

Neigung = $10^{\circ} 37' 26''$ und ihre

jährliche Änderung = $0''.44$ nach Gauss

Excentricität = 0.078439

Größte Mittelpunktlage = $8^{\circ} 59' 42''$

Pallas

Von Olbers den 28. März 1802 entdeckt

Mittlere Entfernung von der Sonne = 2.772 886

Siderische Revolution = 1686.5388 Sonnenlage

Synodische ——— 466.22

Mittlere Bewegung = $12^{\circ} 54' 25''$

Neigung $34^{\circ} 54' 55''.0$

Excentricität = 0.241 648

Größte Mittelpunktlage = $27^{\circ} 49' 19''$

Umlaufzeit der Ceres = 4 Jahre u. 221 Tage

der Pallas = 4 ——— 222 ———

Durchmesser der Ceres = 358 deutsche Meilen

der Pallas = 252

Durchmesser der Ceres in M. = 114 Mitt. d. M.

der Pallas in M. = 114 ———

Jupiter

Durchmesser des Jupiters = 19,980 d. M.
Durchmesser der Jupitersbahn = 217 Mill. d. M.

62

Mittlere Entfernung von der Sonne = 5.202726

was beliebig ¹⁰⁷ Millionen Meilen ist

Siderische Revolution = 4332¹¹ 58 48 21 2" Sonnen Tage
oder sehr nahe 12 Jahre

Diese Periode aber ist manchen Ungleichheiten unterworfen.

Synodische Revolution = 398.867 Tage

Mittlere Bewegung in seiner Bahn = 4' 59" 26. in
einem Sonnentage

Neigung der Bahn = 1° 18' 51" 3 im Anfange dieses
Jahrhunderts, die in einem Jahre um
0" 226 wächst abnimmt

Excentricität = 0.0481621 die größte als bisher
angenommen, die wächst in 106 Jahren
um 0.00015935.

Größte Mittelpunktgleichung = 5° 31' 13" 8 und
wächst um 0.6344 in einem Jahre.

Quadrat seiner Rotation-Bewegung = 9^h 55' 49" 7.

Neigung seiner Axe gegen Ekliptik = 3° 5' 30".

Scheinbarer Durchmesser = 36" 74

Körperlicher Inhalt = 1280.9 der der Erde als
Einheit angenommen.

Der Körper der hier auf der Erde 1 Pfund wiegt, wiegt
er auf dem Jupiter 2.716 Pfund

Das scheinbare Volumen = 167.177

Der körperliche Inhalt = 1280.9, der der Erde 1 genommen.

Saturn

Mittlere Distanz von der Sonne = 9.5387861
was gegen 890 Millionen Meilen liegt.

Siderische Revolution = 10759.2198174 Sonnen Tage
oder 29.486 Julianische Jahre

Aquadratische Revolution = 378.090 Sonnentage
mittlere Bewegung = 2' 0" 6 in Tag

Neigung der Bahn für den Anfang dieses Jahr.
Hunderstes = 2° 24' 35" 7 und nimmt 0.155 in 10 Jahren

Excentricität = 0.05615050 und um 0.000312407 nimmt
ab in 100 Jahren

Die größte Mittelpunktgleichung = 6° 26' 15" und
um 1" 249 nimmt ab in 10 Jahren

Seine Rotationsbewegung dauert nur 10^h 29' 16" 8

Neigung seines Äquators gegen die Ekliptik = 31° 19'

Scheinbarer Durchmesser = 16.70 und wahrer

Durchmesser, ~~ist~~ der der Erde als Einheit genom-

men, 11.982 was beinahe 76068 Meilen

macht. Das Verhältniß der Massen ist 11:82

Sein Volumen = 995.00 das der Erde 1 angenommen

Ein Körper der auf der Erde ein Pfund ^(wird) wiegt, auf

dem Saturnaquivalent ~~oder~~ 1.31 Pfund wiegen

Durchmesser des Saturns = 16290 d. M.

Durchmesser des Saturnsterns = 498 M. d. M.

Uranus

63

Wurde von Herschel den 13. März 1781 entdeckt.
Es war schon im Jahre 1690 als ein Fixstern beobachtet; er wurde auch von Flamsteed, Bradley und Mayer beobachtet auch von Lemornier. Meiner aber hat gedacht er wäre ein Planet.

Mittlere Entfernung von der Sonne = 19.182390,
die der Erde genommen, was gegen 1800 Millionen Meilen macht.

Jährliche Revolution = 84.02 Jahre 51.87 Tage
Synodische = 369.656 Sonnentage

Mittlere Bewegung in der Bahn = ~~8.77~~ = 42.377
in 1. Sonnenlage

- Neigung der Bahn gegen Ekliptik = 46' 28.44
excentricität = 0.04667938 die halbe große Achse
als Einheit angenommen.

Größte Mittelperihelium Abweichung = 5° 20' 57"

Scheinbarer Durchmesser = 4.0

Durchmesser des Uranus = 7488 d. M.

Durchmesser der Uranusbahn = 800 Mill. d. M.

Mond Durchmesser des Mondes in
Meilen = ~~282~~ 470

Mittlere Entfernung von der Erde ist
= 29.982175 Mal dem Diameter der Erde:
oder ²¹⁸⁸³ 23883 Meilen beinahe. -

Siderische Revolution = 27.321661423 =
27⁷ 7^h 43^m 11^s Sonnentage.

Synodische = 29¹² 14^m 2^s 87. Diese Revolu-
tionen sind aber nicht constant. -

Mittlere Bewegung in einem Sonnenlage
= 13° 16' 35.027

Miligung der Bahn = 5° 8' 47.9 über die Mei-
den ist nach vielen Verbesserungen ankonstet.
Es movent eine in Maximum 8' 47.75 gleich ist
die von Copernicus der Entfernung von der Sonne abhän-
gig. Siderische Revolution der Knoten = 18.6 julianische
Jahre

Synodische Revolution der Knoten = 346° 14' 52' 35.1

Excentricität = 0.054854412 die halbe Große Axe = 1

die größte Abweichung = 16° 17' 12.7

Miligung der Axe = 6° 30' 10.8

Ein Körper der auf der Erde 1 Pfund wiegt, wird er
auf unter dem Mondsaquator nur 6 Pfund wiegen.
Die Anzahl der Sterne, die man nicht zählen
kann als zwei und nicht größer als sieben.
und wenn solche nur zwei sind, die müssen Sonnen der
sterne sein. -

Revolutionen des Mondes zusammen gestellt sind

Synodische	-	29 ^d 17 ^h 44 ^m 2 ^s .9 = 29.53088872
Anomalistische		27 13 18 37.4 = 27.55459950
Siderische		27 7 43 11.5 = 27.32166142
Tropische		27 7 43 4.7 = 27.32158242
Modische		27 5 5 36.0 = 27.21222222

Correction die man an die Beobachtungen anbringen muß, wenn die Beobachtungen bei den Meridianen geschehen, auf die Zeit des Moments der Beobachtung zu beziehen.

ist folgende $m + n \cos \delta + c \sec \delta$ in welcher
 $m = a \sin \varphi + b \cos \varphi$ sind a das Anamorphose des Instrumentes,
 $n = -a \cos \varphi + b \sin \varphi$ die Neigung der Rotation, c die Collimation, δ die Declination, φ die Azimut, δ die Declination, φ die Azimut.

$m = 0.76676.a + 0.64494.b$
 $n = -0.64494.a + 0.76676.b$

Die Größe in ist

Jahr	1800	= 46.04367	und log n = 1.30232
	1810	= 46.04676	1.30230
	1820	= 46.04984	1.30228
	1830	= 46.05293	1.30226
	1840	= 46.05601	1.30224
	1850	= 46.05910	1.30222

Höhenparallaxe der Sonne ist

$$8''.5776 \sin(\varphi' - \delta) \quad \left. \begin{array}{l} r \text{ ist die Entfernung der Sonne von der Erde} \end{array} \right\}$$

$$p = aA + bB \text{ wo } A = \sin \varphi', B = \cos \varphi'$$

$$a = 8.5776 \cos \delta, b = -8.5776 \sin \delta$$

φ' ist die geocentrische Breite der Beobachtungsortes für Cracau wo $\varphi = 50^\circ 3' 50''$ ist $\varphi' = 49^\circ 52' 59''.3$

$$\log r = 9.9991594 \quad \log \sin \varphi' = 9.8826686$$

Precession für das Jahr 1750 + t ist
in R. $\frac{d\alpha}{dt} = m + n \tan \delta \sin \alpha$
in Declination ... $\frac{d\delta}{dt} = n \cos \alpha$

wo

$$m = 46''.02824 + t.0.0003086450$$

$$n = 20.06442 - t.0.0000970204$$

und t ist die Anzahl der J. seit 1750, ver-
floßenen Jahre - (Nach Bessel!)

Nutatio und Aberratio

$$\begin{aligned} d\alpha = & + 20''.755 \cos w \cos \alpha \sin \delta \cos \odot \\ & + \frac{20''.755}{15} \sin \alpha \sin \delta \sin \odot \\ & + \frac{0''.580}{15} \cos \alpha \tan \delta \cos 2\odot \\ & + \left(\frac{1''.2285}{15} + \frac{0''.532}{15} \sin \alpha \tan \delta \right) \sin 2\odot \\ & + \left(\frac{15''.345}{15} + \frac{6''.683}{15} \sin \alpha \tan \delta \right) \sin \Omega \\ & + \frac{8''.977}{15} \cos \alpha \tan \delta \cos \Omega \end{aligned}$$

wo $d\alpha$ die Aberration und Nutation in R. bedeutet
 α R., δ Declination, w Schiefe der Ecliptik,
 \odot Länge der Sonne, Ω Länge des aufsteigenden
Knotens.

Scheinbare R. = mittleren R. - $d\alpha$

$$\begin{aligned}
 \Delta p &= -20.255 \cos \alpha \sin \delta \sin \odot \\
 &\quad - 20.255 (\tan \omega \cos \delta - \sin \alpha \sin \delta) \cos \omega \cos \odot \\
 &\quad - 0.532 \cos \alpha \sin 2 \odot \\
 &\quad + 0.580 \sin \alpha \cos 2 \odot \\
 &\quad - 6.683 \cos \alpha \sin \alpha \\
 &\quad + 8.977 \sin \alpha \cos \alpha
 \end{aligned}$$

wo Δp die Aberration und Mutation in der Polhöhe bedeutet, so drß
echtere Polhöhe = mittlere Polhöhe - Δp
 Diese Formeln der Aberration und Mutation
 sind von Littrow gegeben.

Um aus der Δ und Declination die Länge
 und Breite zu finden, gelten die Formeln

$$\sin N = \frac{\tan \delta}{\sin \alpha}$$

$$\tan \lambda = \frac{\cos(N - \omega)}{\cos N} \tan \alpha$$

$$\tan \beta = \tan(N - \omega) \sin \lambda$$

$$\text{(Prüfungsformel!)} \quad \frac{\cos(N - \omega)}{\cos N} = \frac{\cos \beta \sin \lambda}{\cos \delta \sin \alpha}$$

Die gegenwärtigen Formeln sind:

$$\sin N' = \frac{\tan \beta}{\sin \lambda}$$

$$\tan \alpha = \frac{\cos(N' + \omega)}{\cos N'} \tan \lambda \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\cos(N' + \omega)}{\cos N'} = \frac{\cos \delta \sin \alpha}{\cos \beta \sin \lambda} \end{array} \right.$$

$$\tan \beta = \tan(N' + \omega) \sin \lambda$$

α ... Δ
 δ ... Declination
 λ ... Länge
 β ... Breite
 ω ... Schiefe der Ekliptik

Logarithmen der verschiedenen GröÙe

Der Halbmesser im Bogen-Seconden	= 206264.8	5.3144251	Logarithmen
Winkreis dessen Durchmesser = 1	= 3.1415926	0.4971499	
Sin 1"	= 0.00000485	4.6855749	
Sin 2"	= 0.00000970	4.9866049	
Sin 3"	= 0.00001454	5.1626961	
Die Zahl ihrer hyperb. log. = 1	= 2.7182818	0.4342945	
Modulus der Briggs'schen Logarith.	= 0.4342945	9.6377843	
Complement derselben	= 2.3025851	0.3622157	
24 Stunden in Sekunden ausgedrückt	= 86400"	4.9368137	
Complement derselben	= 0.00001157	5.0634863	
360 Grade in Sekunden	= 1296000	6.1126050	

$$x^{\circ} \text{ Radian} = (32 + \frac{9}{10} x^{\circ}) \text{ Fahrenheit} = \frac{9}{5} x^{\circ} \text{ Celsius}$$

$$x^{\circ} \text{ Celsius} = (32 + \frac{9}{5} x^{\circ}) \text{ Fahrenheit} = \frac{5}{9} x^{\circ} \text{ Radian}$$

$$x^{\circ} \text{ Fahrenheit} = (x^{\circ} - 32) \frac{5}{9} \text{ Radian} = (x^{\circ} - 32) \frac{9}{5} \text{ Celsius}$$

zu dem Logarithm der Centesimal Grade addire man 9.9542725 um zu erhalten den Logarithm der sexagesimal Grade.

Zu dem Logarithm der Centesimal Minuten addire man den Log. 1.7323938 um zu erhalten den Log. der sexagesimal Minuten.

Zu dem Logarithm der Centesimal Sekunden addire man den Log. 3.5105450 um zu erhalten den Log. der sexagesimal Sekunden.

Man verfähre umgekehrt um aus dem Sexagesimal System in das Centesimal zurück zukehren d.h. die genannten Zahlen, subtrahire man von den Logarithm der Grade, Minuten und Sekunden.

Lins Fernippe

66

Sei a die R. des Monchs

d die Declination

β die Horizontalparallaxe

in der sichtbare Halbmesser

Dieselben Größen für die Sonne seien α, δ, π, μ

$\partial a, \partial \alpha, \partial d, \partial \delta \dots$ seien die flüchtlichen Änderungen dieser Größen

β die Breite des Monchs zur Zeit des \varnothing

t die Zeit des \varnothing

$$\sin u = \frac{\sin \beta}{\sin 508'}$$

$$\tan n = \frac{\partial d - \partial \delta}{(\partial a - \partial \alpha) \cos d}$$

$$c = (d - \delta) \cos n$$

$$h = \frac{\sin n}{\partial d - \partial \delta}$$

so hat man für die Zeit t der Mitte des Linsfernisses

$$\varnothing = \pm t (d - \delta) h \sin n \quad \varnothing = t \pm (d - \delta) h \sin n$$

Mondsfinsternisse

Sie finden statt wenn zur Zeit des \varnothing $u < 9^\circ 31'$
" nicht statt " " " $u > 12^\circ 4'$

Liegt u innerhalb dieser Grenzen, so suche man ω, ω' aus den Gleichungen

$$\cos \omega = \frac{e}{\frac{b_1}{b_0}(p+\pi-\mu)+m}$$

$$\cos \omega' = \frac{e}{\frac{b_1}{b_0}(p+\pi-\mu)-m}$$

und es findet eine partielle Finsternis statt
wenn $\cos \omega < 1$

es findet keine statt wenn $\cos \omega > 1$ ist;

ebenso findet eine totale Finsternis statt wenn
 $\cos \omega' < 1$

keine wenn $\cos \omega' > 1$ ist.

Die Zeit des Anfangs und Ends der partiellen
Finsternis ist

$$t' = t \mp h \sin \omega$$

und die Zeit des Anfangs und Ends der totalen
Finsternis $t'' = t \mp h \sin \omega'$

Die größte Verfinsternung ist

$$\frac{b_1}{b_0}(p+\pi-\mu)+m-e$$

Sonnenfinsternisse

67

Sie finden statt, wenn zur Zeit der δ $\alpha < 15^\circ 24'$
nicht statt - - - - - $\alpha > 18^\circ 22'$

Innerhalb dieser Grenzen erkennt man das "Statt"
finden derselben wie oben aus den Gleichungen

$$\cos \omega = \frac{e}{p - \pi + m + \mu}$$

$$\cos \omega' = \frac{e}{p - \pi}$$

$$\cos \omega'' = \frac{e}{p - \pi + m - \mu}$$

$$\cos \omega''' = \frac{e}{p - \pi - m + \mu}$$

So findet { eine } partielle Finsternis statt, wenn $\cos \omega \leq 1$ ist;
" { keine } centrale - - - - - $\cos \omega' \leq 1$ "
" { eine } totale " " $\cos \omega'' \leq 1$ "
" { keine } ringförmige " " $\cos \omega''' \leq 1$ "

und es ist

$\alpha = t \pm (d - d') h$ ist die Zeit der Mitte des Finsternisses

$\alpha \pm h e \tan \omega$ die Zeit des Anf. u. End. d. partiellen Finsternisses,

$\alpha \pm h e \tan \omega'$ " " " centralen " "

$\alpha \pm h e \tan \omega''$ " " " totalen " "

$\alpha \pm h e \tan \omega'''$ " " " ringförmigen " "

die größte Verfinstterung ist $p - \pi + m + \mu - e$

Um den Weg des Mondschattens auf der Erde zu finden sey Δ eine gegebene Distanz der Meridiane beider Gestirne für eine gegebene Parallaxe p Zeit

$$y = \frac{\cos d \sin(a-\alpha)}{\sin p}$$

$$z = \frac{\sin(c-d) + 2 \cos d \sin d \sin^2 \frac{a-\alpha}{2}}{\sin p \cos d}$$

$$\Delta \eta = \frac{\partial d - \partial \delta}{(\partial a - \partial \alpha) \cos d}$$

$$Y = y \pm \frac{\Delta}{p} \sin \eta$$

$$Z = z \pm \frac{\Delta \cos \eta}{p \cos d}$$

und man hat

$$\sin \varphi = Z \cos d + \sin d \sqrt{1 - Y^2 - Z^2}$$

$$\sin s = \frac{Y}{\cos \varphi}$$

φ ist die Breite, s der Stundenwinkel der Sonne (wahre Zeit) des gegebenen Ortes, welches für die gegebene Parallaxe Zeit die Distanz Δ sieht.

Für $\Delta = 0$ geben diese Ausdrücke die Orte welche für eine gegebene Zeit eine centrale Finsterniß sehen

68
 Für $A = \mu + m$ oder $A = \mu - m$ gehen sei die Orte, welche für die gegebene Zeit die äussere oder innere Berührung des Randes sehen, und daher an der Grenze des Schattenweges liegen, den der Mond auf der Erde beschreift. Das obere Zeichen von μ und μ gehört für die nördliche, das untere für die südliche Grenze des Schattenweges.

Um den Anfang und das Ende einer Sonnenfinsternis zu berechnen, dienen folgende Formeln. Seien Q_1, Q_2, Q_3 die Polhöhen für drei bekannten Orte und t_1, t_2, t_3 die nach folgenden Formeln berechneten Zeiten des Anfanges der Sonnenfinsternis in wahrem Sonnenzeit ausgedrückt. t ist dann der Anfang der Finsternis für einen gegebenen Ort und Q seine Polhöhe bezeichnen.

$$t = A\lambda + BQ + C$$
 wo λ die geographische Länge von Paris an östlich gerechnet bedeutet. Die numerischen Werthe der Coefficienten A, B, C findet man aus den drei Gleichungen

$$\begin{aligned} t_1 &= A\lambda_1 + BQ_1 + C \\ t_2 &= A\lambda_2 + BQ_2 + C \\ t_3 &= A\lambda_3 + BQ_3 + C \end{aligned}$$
 in denen die gröszen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die geographischen Längen der drei bekannten Orte nach von Paris östlich gerechnet vorstellen.

Für den Anfang der Finsternis verfähert man auf die nämliche Weise.

Die Länge eines elliptischen Quadranten ist

Summe
$$= \frac{b^2\pi}{4a} \left\{ 1 + 3\left(\frac{e}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{3e^2}{2 \cdot 4}\right) + 7\left(\frac{3 \cdot 5 \cdot e^3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right) + \dots \right\}$$

wo $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$, a die halbe grosse und b die halbe kleine Axe der Ellipse ist (s. oben auf der umgekehrten Seite).

Die Oberfläche der Kugel vom Radius r bis zur Mitte P ist

$$= 2b^2 \sin \varphi + 1 + \frac{2}{3} e^2 \sin^3 \varphi + \frac{2}{5} e^4 \sin^5 \varphi + \dots$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist die Oberfläche der halben Kugel.

$$= 2b^2 \pi \left\{ 1 + \frac{2}{3} e^2 + \frac{2}{5} e^4 + \dots \right\}$$

$$= 2\pi r^2 \left\{ 1 + \frac{1}{3} e^2 + \frac{1}{5} e^4 + \dots \right\}$$

oder wenn $b^2 = r^2(1 - e^2)$

Volumen der Kugel

$$V = \frac{4}{3} a^2 b \pi$$

Die Abplattung der Erdsphäroid, heißt der
 Quotient $\frac{a-b}{a}$ aus der Messung von
 Dufay folgt diese Abplattung = $\frac{1}{300.66} = 0.003326$
 Die vergrößerte Polhöhe folgt aus der Gleichung
 $\tan \varphi' = \frac{b^2}{a^2} \tan \varphi$ wo φ die beobachtete Höhe
 φ' die geocentrische Polhöhe, a und b
 die halben Axen des elliptischen Erdsquaders
 bezeichnen. Löst man diese Gleichung
 nach der Formel

$\tan \frac{1}{2} \varphi = \tan \frac{1}{2} \varphi' \cos \epsilon$ aus welcher $\frac{1}{2} \varphi = \frac{1}{2} \varphi' + \frac{m-1}{m+1} \sin^2 \varphi' + \dots$
 in eine Reihe auf, so wird

$$\varphi' = \varphi + A \sin^2 \varphi + \dots$$

wo $A = \frac{m-1}{m+1} = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} = - \frac{1 - \frac{b^2}{a^2}}{1 + \frac{b^2}{a^2}}$

Will man die Correction $A \sin^2 \varphi$ in Minuten
 erhalten, so muß noch mit $\sin 1'$ dividirt werden
 Für die Bessel'sche Abplattung wäre $a/b = 0$

$$\varphi' = \varphi - A \sin^2 \varphi \quad \text{mit } \log A = 1.0588562$$

Für die Astronomische Nachrichten wird man

$$m = 57013.109 - 286.337 \cos 2\varphi + 0.611 \cos 4\varphi + 0.001 \cos 6\varphi$$

$$p = 57156.285 \cos \varphi - 47.825 \cos 3\varphi + 0.060 \cos 5\varphi \quad \frac{a-b}{a} = c = \frac{1}{299.152}$$

$$\text{oder, wenn } \sin \psi = e \sin \varphi$$

$$\log p = 4.7567009 + \log \cos \varphi - \log \cos \psi \quad \log c = 7.5241069$$

$$\frac{c}{\gamma} = 0.06314417 + 0.00031714 \cos 2\varphi + 0.0000003 \cos 4\varphi$$

$$\frac{w}{\gamma} = 0.06293757 + 0.00010536 \cos 2\varphi - 0.00000004 \cos 4\varphi$$

$$\log \frac{w}{\gamma} = 8.8075099 + 3 \log \cos \psi \quad \log \frac{w}{\gamma} = 8.79960160 + \log \cos \psi$$

$$\lambda = 0.06303837 + 0.00021125 \cos 2\varphi + 0.00000004 \cos 4\varphi$$

$$\lambda' = 0.00010580 + 0.00010584 \cos 1\varphi + 0.00000009 \cos 4\varphi$$

$$a = 3272077.14 \quad \log a = 6.514871537 \quad \log e = 8.5122052$$

$$b = 3261194.33 \quad \log b = 6.5133693539 \quad \log \sqrt{1-e^2} = 9.9485458.702$$

Aus Bessel's Abhandlung Astron. Nachrichten N^o 333.

Länge eines Meridianbogens, oben mittlere Pol-

höhe = φ :

$$m = 57011.453 - 284.851612\varphi + 0.593614\varphi - 0.001616\varphi^2$$

Länge eines Grades des Parallels:

$$p = 57153.885 \cos \varphi - 47.576 \cos^3 \varphi + 0.059 \cos^5 \varphi$$

$$\text{oder wenn } \sin \psi = e \sin \varphi, \dots \log e = 8.9110835$$

so ist

$$\log p = 4.7566815 + \log \cos \varphi - \log \cos \psi$$

Krümmungshalbmesser im Meridiane = r' in der

außen Senkrechten Richtung = r'' in der Äqui-

mitale $\alpha = r$,

$$\frac{\omega}{r'} = 0.06314600 + 0.00031552 \cos 2\varphi + 0.00000013 \cos 4\varphi$$

$$\frac{\omega}{r''} = 0.062935248 + 0.00010482 \cos 2\varphi - 0.00000004 \cos 4\varphi$$

$$\log \frac{\omega}{r'} = 8.8025112.9 + 3 \log \cos \varphi$$

$$\log \frac{\omega}{r''} = 8.7996179.6 + \log \cos \varphi$$

$$\text{und } \frac{\omega}{r} = \lambda + \lambda' \cos 2\alpha$$

wo

$$\lambda = 0.06304074 + 0.00021017 \cos 2\varphi + 0.00000004 \cos 4\varphi$$

$$\lambda' = 0.00010526 + 0.00010535 \cos 2\varphi + 0.00000009 \cos 4\varphi$$

Entfernung vom Mittelpunkte der Erde = ϱ und

so genannte verbesserte Breite φ' :

$$\log \varrho \cos \varphi' = \log \cos \varphi - \log \cos \psi \quad 0.0029083.6 \text{ (N^o 438)}$$

$$\log \varrho \sin \varphi' = \log \sin \varphi - \log \sin \psi - 0.0028933.3$$

Größe Axc. des Ellipsoids oder $a = 3271953.854$

$$a = 6.5148071694 \log b = 6.5133605073 \quad b = 3261072.900$$

Um das Azimuth eines Sternes zu finden,
hat man folgende Gleichungen

$$\lg \frac{1}{2}(A+q) = \operatorname{ctg} \frac{1}{2} p \frac{\cos \frac{1}{2}(d-c)}{\cos \frac{1}{2}(d+c)}$$

$$\lg \frac{1}{2}(A-q) = \operatorname{ctg} \frac{1}{2} p \frac{\sin \frac{1}{2}(d-c)}{\sin \frac{1}{2}(d+c)}$$

in welchen A das Azimuth, q der Variations-
winkel, d die Polhöhe des Sterns, $c = 90^\circ - \varphi$
und $\pm p = \text{Sternzeit} - \text{R}^* = \text{Mitternacht} \pm \text{Sternzeit in mittl.}$
Mittern. - R^* oder p ist nichts anderes als
Stundenwinkel positiv genommen wenn der
Stern auf der Westseite des Meridians und nega-
tiv wenn er auf der Ostseite ist. Der erste
Ausdruck wird gebraucht wenn man nach der
Sternzeit beobachtet, und der zweite wenn die
Uhr nach der mittleren Zeit geht.

Wenn die Höhe eines Sterns oder seine Zenith-
distanz bekannt ist, so findet man das Azimuth aus
der folgenden Gleichung

$$\cos \frac{1}{2} A = \frac{\sin k \cdot \sin(k-d)}{\sin 2 \sin c} \quad k = \frac{z+d+c}{2}$$

in welchen d und c die früheren Bedeutung haben
und Z aber ist die Zenithdistanz durch Refrac. - Parallax
corrigirt

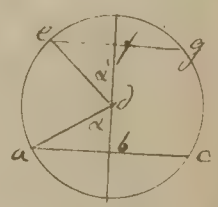
Reduction einer ^{Länge} ~~Winkel~~ zum Horizont A

Diese Reduction ist $Z = \frac{1}{2} a \theta \sin \frac{1}{2} \theta$
wo a die gemessene geneigte Länge ^{des} der Neigungs-
winkel ist; wenn jedoch die Reduction genau seyn
muss, so nicht größer als 3 oder 4 Grade seyn.

Bestimmung des Halbmessers eines Kreis- micrometers. (nach Bessel:)

Die beste und sicherste Methode zu dieser Be-
stimmung ist durch die Durchgänge zweier Ster-
ne deren Declination bekannt ist.

Seien diese Declinationen δ und δ' und t und t' die
Zeiten die die Sterne brauchen zur Beschreibung
der Bögen eg und ac , so hat man
wenn man die Wege der Sterne als grad.
Linien betrachtet



$$ac = 15 t \cos \delta = a$$

$$eg = 15 t' \cos \delta' = a'$$

$$\text{hienus } b = \delta - \delta' = \frac{1}{2}(4r^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(4r^2 - a'^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{oder } 4r^2 = (\delta - \delta')^2 + \frac{1}{2}(a^2 + a'^2) + \left(\frac{a^2 - a'^2}{4(\delta - \delta')}\right)^2$$

und endlich

$$2r = \delta - \delta' + \frac{a^2 + a'^2}{4(\delta - \delta')} - \frac{a^2 a'^2}{8(\delta - \delta')^3} + \frac{(a^2 + a'^2)a^2 a'^2}{32(\delta - \delta')^5} - \dots$$

oder ohne merklichen Fehler

$$2r = (\delta - \delta') + \frac{\{15 \cos \frac{1}{2}(\delta + \delta')\}^2 (t^2 + t'^2)}{4(\delta - \delta')} - \frac{\{15 \cos \frac{1}{2}(\delta + \delta')\}^4 t^2 t'^2}{8(\delta - \delta')^3} + \dots$$

wo die Coefficienten der Potenzen t, t' constant sind
und bei der Berechnung aller Beobachtungen eg &c.
benutzt werden können. Die erste der zwei letzten
Gleichungen hat dann ~~ihren~~ ihren Vortheil wenn
 $\delta - \delta'$ sehr klein ist, oder wenn der Unterschied zw.
den Abweichungen beider Sterne nahe dem Durch-
messer des Kreis micrometers gleich ist. Die
zweite der genannten Gleichungen liefert der Be-

Bestimmung des Halbmessers dient auch dazu, um sich zu überzeugen ob das Schiefeld Kreisförmig ist. —

In der Gleichung $r^2 = \dots$ setzt man für $a^2 + a'^2$, $(a+a')^2 + (a-a')^2$ so erhält man

$$4r^2 = \left\{ \rho'' - \rho' + \frac{(a+a')^2}{4(\rho'' - \rho')} \right\} \left\{ \rho'' - \rho' + \frac{(a-a')^2}{4(\rho'' - \rho')} \right\}$$

Aus derselben Gleichung wenn man ein Mal $a^2 - a'^2$ und dann $a'^2 - a^2$ addirt bekommt man

$$4r^2 = a^2 + \left\{ \rho'' - \rho' - \frac{(a+a')(a-a')}{4(\rho'' - \rho')} \right\}^2$$

und $4r^2 = a'^2 + \left\{ \rho'' - \rho' + \frac{(a+a')(a-a')}{4(\rho'' - \rho')} \right\}^2$

Alle die vorigen Ausdrücke werden zur Berechnung mit bequemer eingerichtet, wenn man zwei Hilfswinkel Z und Z' einführt so dass $\alpha = Z - Z'$ und $\alpha' = Z + Z'$, wo α und α' die Winkel sind, die die aus dem Mittelpunkt des Schiefels, des zu den Ein- oder Austrittspunkten der Sonne gezogenen Halbmessers mit dem Declinationskreis bilden, es ist nemlich

$$\rho'' - \rho' = r \{ \cos(Z+Z') + \cos(Z-Z') \} = 2r \cos Z \cos Z'$$

$$ef + ab = \frac{1}{2}(a+a') = r \{ \sin(Z+Z') + \sin(Z-Z') \} = 2r \cos Z' \sin Z$$

$$ef - ab = \frac{1}{2}(a'-a) = r \{ \sin(Z+Z') - \sin(Z-Z') \} = 2r \cos Z \sin Z'$$

Dividirt man die beiden letzten Gleichungen durch die erste, so erhält man

$$\tan Z = \frac{\frac{1}{2}(a+a')}{\rho'' - \rho'}, \quad \tan Z' = \frac{\frac{1}{2}(a'-a)}{\rho'' - \rho'}$$

Mit diesen Hülfsgrößen hat man aus den letzten Gleichungen

$$2x = \frac{D-D''}{\cos Z \cos Z'}$$

$$2x = \frac{\frac{1}{2}(a^2 + a'^2)}{\cos Z' \sin Z}$$

$$2x = \frac{\frac{1}{2}(a^2 - a'^2)}{\cos Z \sin Z'}$$

$$2x = \frac{a}{\sin(Z-Z')}$$

$$2x = \frac{a'}{\sin(Z+Z')}$$

Aus den drei ersten Gleichungen sieht man, dass die Bestimmung des Halbmessers am vortheilhaftesten erfolgt wird, wenn $D-D''$ sehr nahe $= 0$ oder nur sehr wenig kleiner als $2x$; im ersten Falle die Fehler der Declinationen und im zweiten die der Beobachtungen haben den kleinften Einfluss. Die zwei letzten Ausdrücke erhält man aus den zwei der früheren drei Gleichungen indem man die ein Mal addirt und dann subtrahirt.

Hat man auf diese Art den Halbmesser bestimmt, so kann man sehr leicht die Position eines unbekannten Gestirnes finden wenn man etliche Einträge und Schritte mit demselben Kreisniveaumeter beobachtet eines bekanten und zu bestimmenden Sternes mit demselben Kreisniveaumeter beobachtet. Es ist nöthig im mer

Die A des unbekannten Sternes gleich dem
 Standesfehler des arithmetischen Mittel aus
 den Ein- und Ausstrichen beider Sterne zu
 der A des bekannten Sternes mit seinem Zeichen
 addirt. --- z. B. A des bekannten Sternes
 α und die des unbekannten α' und überdies
 E und E' , A und A' , ^{die Summe der} Einstriche und Ausstriche
 beider Sterne so ist:

$$\alpha' = \alpha + \frac{A+E}{2} - \frac{A'+E'}{2}$$

Sind ferner d und d' die Abstände vom Mittel-
 punkte des Gesichtsfeldes in Bogensekunden aus-
 gedrückt, positiv negativ und d als der Abstand
 des bekannten Sternes angenommen, so berechnet man
 nach:

$$\sin \alpha = \frac{15 \cos d}{2r}$$

$$\sin \alpha' = \frac{15 \cos d'}{2r}$$

$$\text{ferner } d = r \cos \alpha$$

$$d' = r \cos \alpha'$$

$$\text{so ist } d'' = d + d' - d$$

In dem Fall wenn, daß die verglichenen Sterne zu
 nahe am Pol stehen, wird die Declination δ''
 durch folgende Gleichung bestimmt

$$\delta'' = d + d' - d + \sin \frac{1}{2} \cdot \lg \frac{(A+E)(A'+E')}{(A+E')(A'+E)}$$

Wenn sich der unbekannte Stern zu schnell
 seine Position ändert, so müssen noch Correctionen
 an die oben gegebenen α' und δ'' hinzugebracht werden.

welche so gefunden werden: Heißt $\Delta\alpha'$ die in
 Sekunden ausgedrückte Änderung der R. in einem
 mittleren Tage, und $\Delta\delta''$ die der Declination, so
 werden diese Änderungen während eines Stunden-
 Sternzeit $\frac{\Delta\alpha'}{86636}$ und $\frac{\Delta\delta''}{86636}$ be tragen und es
 müssen dann die Correctionen

$$+ \frac{\delta'' \Delta\delta''}{1299540.63\delta''} \text{ und } \frac{\frac{1}{4} \Delta\alpha' \alpha'^2}{1299540.6\alpha'}$$

mit ihren Zeichen respective an die berechnete
 R. und Declination angebracht werden, α' be-
 deutet die beschriebene Sekunde oder die Zeit
 vom Meridiane bis zum Austritte. —

Stellt man die Beobachtungen mit dem
 Kreis-Micrometer in geringen Höhen, so an-
 so muß man noch auf die Refraction Rück-
 sicht nehmen. Ist φ Stundenwinkel: öfentlich
 negativ: und φ die Polhöhe, so berechne man
 zuerst $\text{Log. } \psi = \text{Cos. } \varphi \text{ Log. } \varphi$
 dann vergrößert man den Durchmesser des Kreis-
 micrometers wegen der Refraction, diese Correc-
 tion ist = $-\frac{57'' \sin(\delta'' - \delta')}{\sin(\psi + \frac{1}{2}\delta'' + \frac{1}{2}\delta')^2}$

d. h. der wahre Durchmesser $2R$ wird seyn

$$2R = 2r - \frac{57'' \sin(\delta'' - \delta')}{\sin(\psi + \frac{1}{2}\delta'' + \frac{1}{2}\delta')^2}$$

und

$$\begin{aligned} & \text{die verbesserte AR} = \text{unverbesserte AR} \times \\ & \times \frac{\alpha \sin(S'-S') \lg t. \sin \psi}{\sin(\psi + \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}S'')^2 \cos S \cos S''} \\ & \times \{ \cos(\psi + S + S'') + \cos \psi \cos \frac{1}{2}(S + S'') \} \end{aligned}$$

Die verbesserte Declination = unverbesserte
 $+ \frac{\alpha \sin(S'-S')}{\sin(\psi + \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}S'')^2} \left\{ 1 - \frac{r^2}{(d \cdot d')^2} \right\} \left(\frac{\cos^2 \psi}{\lg^2 \varphi} + \cos \psi \sin \psi \lg \frac{1}{2}(S + S'') \right)$
 wo für die Höhen über 12° , wenn $S'-S'$ nicht zu
 groß ist, anstatt α fast stets $57''$ gesetzt wer-
 den kann

Geographische Lage von Cracow

Geographische Breite	$50^\circ 3' 50''$ nördlich
Länge	$1^\circ 10' 29.6''$ von Paris
	$26' 18.6''$ - Berlin
	$37^\circ 37' 24''$ - Ferro

Geographische Lage von Warschau

Breite	$52^\circ 13' 5.06''$
Länge	$1^\circ 14' 45.6''$ von Paris
	$18^\circ 41' 24.875''$
	$38' 41' 24.875''$ von Ferro

Entfernung von Polkauer Meermarke nach Wars-
 chau $37^\circ 14' 32''$ Dist gegen W. u. N.

Länge von Polkauer Meermarke = $1^\circ 51' 56.97''$ von Paris
 $= 2^\circ 1' 18.67''$ von Ferro

Berechnung der geographischen Länge aus Beobachtungen nach Bessel

Man drückt zuerst alle Beobachtungszeiten in mittleren Sonnenzeiten aus, hierauf bringt man alle mit der vorläufig bestimmten Meridianen Westzeit auf mittlere Zeiten des Ortes der Ephemeriden, nimmt aus allen das Mittel T welches nur auf die mittlere Viertelstunde genau zu sein braucht. Man suche man für die Zeiten $(T-1)^h$, T^h und $(T+1)^h$ aus den Ephemeriden α , δ und Π für den Monat mittelst einer Interpolationsformel oder nach den Tafeln von Anger. Daraus berechne man mit A und D die Abundanz und Defektion des Fixsternes, die behält den Polhöhen der Beobachtungsörter aber mit φ und berechne

$$\cos \varphi' = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi^2}} \quad \sin \varphi' = \frac{(1 - \varepsilon^2) \sin \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi^2}}$$

Ferner berechne man für die drei Zeiten $(T-1)^h$, T^h und $(T+1)^h$ die Größen P und Q aus

$$P = \frac{\cos \sin(\alpha - A)}{\sin \Pi}$$

$$Q = \frac{\sin \delta \cos D - \cos \delta \sin D \cos(\alpha - A)}{\sin \Pi}$$

Die Größen P und Q sind dieselben & welche später mit p und q bezeichnet werden, und gehören zu der Zeit T , die Veränderungen aber dieser Größen p' und q' in der Zeit T' werden so gemacht, dass man die Werte von P und Q als für die Zeit $T+T'$ geltend betrachtet und man $P = p + pT'$, $Q = q + qT'$ hat.

Suche man $T' = t - T - d$, wo t die mittlere Zeit der Beobachtung an jedem einzelnen Orte bedeutet und drückt T' in Stunden und deren Decimaltheil aus. In Berechnung man p' und q' für jeden Ort.

Zuletzt rechnet man

$$u = r \cos \varphi' \sin(\mu - A)$$

$$v = r \sin \varphi' \cos \mu - r \cos \varphi' \sin \mu \cos(\mu - A)$$

$$\begin{aligned} m \sin M &= p - u \\ m \cos M &= q - v \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} \lg M &= \frac{p-u}{q-v} \end{aligned} \right. \quad m = \frac{p-u}{\sin M} = \frac{q-v}{\cos M}$$

$$\begin{aligned} n \sin N &= p' \\ n \cos N &= q' \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} \lg N &= \frac{p'}{q'} \end{aligned} \right. \quad n = \frac{p'}{\sin N} = \frac{q'}{\cos N}$$

$$\cos \psi = k \cdot m \sin(M - N) \quad \text{wo } \lg k = 0.5646335$$

ψ muss immer zwischen 0° und 180° genommen werden, weil die Beobachtungen die Eintheile sind und zwischen 180° und 360° wenn sie Austritte sind. Endlich rechnet man

$$T'' = \frac{m \cos(M - N - \psi)}{\sin \psi} \quad \lg 5 = 1.7781572$$

$$\text{und } \lg 6 = 0.4637256 + \text{comp. } \lg n + \text{comp. } \lg \sin \pi$$

Hat man nun $t - T$ in Hundstücken und diesen Deimaltheilen ausgedrückt, so findet man die wahren Meridiantenabstände d aus der Formel

$$d = t - T + T'' + h \cdot \varepsilon + h \cdot \cot \psi \cdot \zeta$$

und die Beobachtungen $\Delta \alpha$ und $\Delta \delta$ aus

$$+ \sin N \cos \Delta \alpha + \cos N \Delta \delta = \varepsilon$$

$$- \cos N \cos \Delta \alpha + \sin N \Delta \delta = \zeta$$

oder wenn man weiß berechnet

$$T''' = \frac{h \cos(N + \psi) \cos \varepsilon}{\sin \psi} \quad \text{und} \quad T'''' = \frac{h \sin(N + \psi)}{\sin \psi}$$

so wird

$$d = t - T + T'' - T''' \Delta \alpha + T'''' \Delta \delta \quad \text{setzen}$$

zum Kalenderwerfen

74

Bezeichnungen des jüdischen Kalenders

Im jüdischen Kalender gibt es 14 verschiedene Jahresformeln oder Normalkalender, nach denen im ganzen Jahre sich die Festtage und andere damit zusammenhängende religiöse Gebräuche richten. Wir wollen diese 14 Normalkalender auf folgende Art bezeichnen:

2K, 2g, 3m, 5m, 5g, 7K, 7g für die gemeinen Jahre

2K, 2g, 3M, 5K, 5G, 7K, 7G für die Schaltjahre

In dieser Zeit kann bezeichnen die Zahlen die Wochentage, auf welche der Neujahrs Tag fällt; die Buchstaben K, g, m ein kurzes, ein großes und ein mittleres Jahr und zwar in gemeinen Jahren von 353, 355, 354, in Schaltjahren von 383, 385 und 384 Tagen. Dies sind die beiden charakteristischen Merkmale eines jüdischen Jahres. Aus diesen läßt sich für die ganze jüdische Kalendersberechnung, folgende allgemeine Aufgabe aufstellen.

I. Nach der jüdischen Zeitrechnung.

Bei jedem gegebenen Jahre A der jüdischen Zeitrechnung zu bestimmen, welches von den 14 Normalkalendern in dem vorliegenden Jahre für einen vollkommenen Jahr, normaler Jahre gelten soll.

Die Auflösung, welche also 14 verschiedene Fälle zu be-
stimmen hat, ist folgende: Man dividire die Zahl $12A + 7$ durch 19 und nehme den Rest R; ist dieser $= 1$, so nehme man $19 + 1 = R$. Man suche dann den Werth von

$$0.158117458A + 0.2220345R + 0.812684$$

und setze in der gefundenen Summe die Ganzen und ein-
bruchtheile fest, den Decimalbruch $= R$.

Das gegebene Jahr A ist ein Schaltjahr, wenn $R < 9$ ge-

gefunden wird; sonst aber immer ein gemeines Jahr.
Der Kalender des Jahres A aber wird vermittels des
gefundenen Werthes von T auf folgende Weise bestimmt.
Es ist nämlich

Beim Schaltjahre
 $= 2K$ wenn $T=70$

2G	0'157468
3M	0'285714
5K	0'428571
5G	0'533570
7K	0'714285
7G	0'871753

Beim gemeinen Jahre
 $= 2K$ wenn $T=70$.

2G	0'090410
3M	0'285714
5M	0'376124
5G	0'661838
7K	0'714285
7G	0'804695

ist im gemeinen Jahre der Werth von R 713 bis 15 incl.
 • ändert man die Grenze bei 3M und setze dieselbe
 $= 0'271103$; ist R 715, so ändert man außerdem noch
 die Grenze bei 7G und setze an dieser Stelle $= 0'752248$
 • z. B. für das Jahr 5604 der jüdischen Zeit
 rechnung findet man $R=14$ $T=0'0914$. Das Jahr
 ist also ein gemeines Jahr und sein Kalender
 $= 29$ d. h. es fängt am Montag an und seine
 Länge = 355 Tage.

II. Nach der christlichen Zeitrechnung.

Bei jedem gegebenen Jahre A der christlichen Zeitrechnung
 zu finden, mit welchem Tage der christlichen Datierung der
 jüdische Neujahrstag beginnt und welcher und welcher
 der 14 Monate des Kalenders im ganzen Laufe dieses Jahres
 gebraucht werden soll.

Man dividire die Zahl $12A-85$ durch 16 und nenne
 den Rest R, so dass man, wenn sich $R=1$ findet, $R=1+16$
 nimmt. Ferner dividire man A durch 4 und nenne den Rest
 r. Dann suche man die Zahl

$25G8711 + 15542418R + 025r - 000317774A$
 und nenne den Ausdruck S+s so dass S die ganze Zahl

und's den Decimalbruch dieses Ausdrucks bezeichnen.
 Endlich dividire man noch die Größe $S+3A+5r$ durch 7
 und nenne den Rest T .
 Das gesuchte Jahr ist ein Schaltjahr, wenn $R < 9$, im
 gemeinen aber wenn $R = 79$ ist. Der Kalender des gesuch-
 ten Jahres ist:

Im Schaltjahre

= 2K wenn $T+s = 70$

2G	1'10227
3M	2'0
5K	3'0
5G	3'73514
7K	5'0
7G	6'10227

Im gemeinen Jahre

= 2K wenn $T+s = 70$

2G	0'63287
3M	2'0
5M	2'63287
5G	4'63287
7K	5'0
7G	5'63287

Ist bei dem gemeinen Jahre $R 713$ bis 15 incl. so änd.
 er man bei dem Obigen die Grenze von 3M und setze
 dieselbe = 1'89772. Ist aber $R 715$ so ändere man
 noch die Grenze von 7G und setze dieselbe = 5'26584.
 Hat man den Kalender des gesuchten Jahres gefunden und
 dessen Zahl sei z. B. = d , so beginnt dann der gesuchte
 Neujahrstag am $(S+d-T)$ ten August alten Stils, oder
 wenn diese Größe größer als 31 ist, am $(S+d-T-31)$ ten
 September.

Beispiel Man suche den jüdischen Kalender für das Jahr
 1847. Hier ist $R=5$, $r=3$, $T=5$ $S+s=28'65893$. Das
 gesuchte Jahr ist ein Schaltjahr weil $R < 9$. Da aber
 $T+s 76$, also der Kalender des laufenden Jahres = 7K
 und $d=7$ ist, so trifft der Neujahrstag auf den
 $28+7-5 = 30$ ten August alten Stils, oder 11ten Septb. n. S.
 Das jüdische Jahr beginnt demnach am Sonnabend den
 11. Septb. ist ein kurzes Schaltjahr von 383 Tagen.

Dla Kružnice

Wysokość bieguna = $50^{\circ} 3' 50''$

Próchność - - - = $49\ 52\ 29.72$

Log. odległości od środka ziemi = $9.999\ 1486$

Log. Normalnej wsi do osi świata = $0.000\ 8538$

Odległość 1^o południka = 57062.899 par. Toise

~~Próchność~~ = 57220.898 —

1^o Próchność = 36731.989 —

Odległość Tutej od równika do Kružnice
= 2846216.323 par. Toise

Od. równika do bieguna = 5131179.871 Toise

Wzrost $\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2} \cdot \frac{1}{a} (1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2)$

Wzrost elips. równika do północy

= $\frac{b\pi}{a} \left\{ 1 + 3\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{3\varepsilon^3}{2.4}\right)^2 + 7\left(\frac{3.5\varepsilon^5}{2.4.6}\right)^2 + \dots \right\}$

Wzrost 1^o południka do 1^o południka, $\frac{a\pi(1-\varepsilon^2)}{180(1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$

Wzrost 1^o poł. gołego, $\frac{a\pi \cos^2 \varphi}{180(1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$

Wzrost tutej południka od równika do poł. gołego

= $\left\{ 1 + 3\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{3\varepsilon^3}{2.4}\right)^2 + 7\left(\frac{3.5\varepsilon^5}{2.4.6}\right)^2 + \dots \right\} \frac{b^2 \pi \varphi^0}{180 a}$

- $\left\{ 3\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{3\varepsilon^3}{2.4}\right)^2 + 7\left(\frac{3.5\varepsilon^5}{2.4.6}\right)^2 + \dots \right\} \frac{b^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi}{a}$

- $\frac{1}{2} \left\{ 5\left(\frac{3\varepsilon^3}{2.4}\right) + 7\left(\frac{3.5\varepsilon^5}{2.4.6}\right) + \dots \right\} \frac{b^2 \sin^2 \varphi^3 \varphi}{a}$

+ $\frac{1}{8} \left\{ -\frac{2.4}{3.5} \left(\frac{3.5\varepsilon^3}{2.4.6} + \dots \right) \right\} \frac{b^2 \sin^2 \varphi^5 \varphi}{a}$

— i t. d.

Próchność pąka między równikiem i próchnością

oś południka gołego, φ

= $2b^2 \pi \sin \varphi \left(1 + \frac{2}{3} \varepsilon^2 \sin^2 \varphi + \frac{2}{5} \varepsilon^4 \sin^4 \varphi + \frac{8}{7} \varepsilon^6 \sin^6 \varphi + \dots \right)$

Próchność tutej = $4b^2 \pi \left(1 + \frac{2}{3} \varepsilon^2 + \frac{2}{5} \varepsilon^4 + \frac{8}{7} \varepsilon^6 + \dots \right)$

Odległość tutej = $\frac{4}{3} a b \pi$

Mapa wody szczytu wielkiej Kłanicy wód
 19364940000 bilionów Ctn. (wiednich)
 według dopływów: Markelina i Cawondapha
 systemu ziem: gęst. wody = 9:2
 natężenie ziem wód
 87142230000 bilionów Ctn. (wiednich)

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}, \quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

Właściwości atmosferycznej i termodynamicznej, która jest
 główną przyczyną zmiany temperatury, w której zmienia się

$$e^2 = \sin^2 \psi \sin^2 \mu + \sin^2 \psi \sin^2 \mu + 3 \sin^2 \psi \sin^2 \mu + \dots$$

$$\text{gdzie } D = \frac{a - g}{3a} \text{ a } \cos \mu = \sqrt{\frac{a}{a}} \cdot \frac{\sin \psi}{\sin \psi} \text{ zaś } \cos \psi \text{ oraz}$$

zależność dwóch płaszczyzn pod kątem ψ i μ między
 nimi. Obrazkowemu e^2 jest to równie

$$\frac{a - b}{a} = \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2.4} e^4 + \frac{1.3}{2.4.6} e^6 + \dots$$

Cechy charakterystyczne układu ciał systematycznie ułożonego
 nazywają się różnymi rodzajami, między innymi a) drugim
 systematycznym. Cechy te zależą na stosunek pierwiastków
 kwadratów, z czego iat gtoowych kładzie systematyczny.
 Jeżeli bowiem figurą powierchnią układu w czasie t prze-
 pędzi wzdłuż opisanego a) parametru drugi planet,
 to według 2^{go} prawa Keplera jest $\frac{1}{2} = \mu \sqrt{p}$, gdzie μ jest
 stałą dla każdego planety, do którego systematycznie ułożony,
 co się dowodzi. Niech F oznacza powierchnię ciał, ob-
 cy proporcjonalnie do drugiego w czasie T opisanego, tedy również być
 musi $\frac{F}{T} = \mu \sqrt{p}$. Ale $F = 2\pi a \sqrt{1 - e^2}$, zaś $p = a(1 - e^2)$, a pto co ci
 ułożony, e mianowicie, a dla tego $\mu = \frac{2\pi a^2}{T}$. Według trzeciego prawa
 Keplera jest $a^3 : T$ do stałej dla wszystkich planet, zatem i
 μ musi być do stałej. To więc μ jest cechą każdego systematycznie
 ułożonego. Dla ziemi $a = 1$ $T = 365.256384$ dni, przeto
 $\mu = 0.0172021$ a to jest ucha dla wszystkich innych planet
 ułożonych systematycznie. — Dla Wenus $T = 224.7016$
 $a = 0.00280798$ przeto dla Wenus $\mu = 0.00007888$. — Dla Marsa $T = 686.97$
 $a = 0.0000526$ (Pamięć na ułożony i chronię pot.)

Porównanie prawdań Keplera t.j. ze prawdań 71

$$a = x - e \sin x$$

analizę x

Przykład 1. Jeśli $a < 180^\circ$, wtedy potrzeba obrażać się po prostu
krawędzi d, φ i φ' i nie potrzeba krawędzi

$$d = \frac{a}{e} - 1, \quad \sin \varphi = \frac{e}{d} \sqrt{\frac{a}{e}}, \quad x' = 90^\circ \text{ d } \varphi \text{ a otrzymamy}$$

$$x = x' + \frac{a - x' + e \sin x'}{1 - e \cos x'}$$

Przykład 2. Jeśli $a > 180^\circ$, obrażać się potrzeba

$$d = \frac{a}{e} + 1, \quad \sin \varphi = \frac{e}{d} \sqrt{\frac{a - 180^\circ}{e}}, \quad x' = 180^\circ + 180^\circ \text{ d } \sin \frac{1}{2} \varphi^2$$

$$\text{a wtedy } x = x' + \frac{a - x' + e \sin x'}{1 - e \cos x'}$$

$$\log x = 9.9064067$$

$$\log 90 = 1.9542425$$

$$\log \beta = 9.4265971$$

$$\log 180 = 2.2552725$$

$$\log x = 1.7587226$$

Chybaż planety w punkcie przystojącym

$$= \sqrt{\frac{\mu(1+e)}{a(1-e)}}, \quad \text{w punkcie zaś ośtonierającym} = \sqrt{\frac{\mu(1-e)}{a(1+e)}}$$

gdzie $\mu = 16.84293$, e mimośród, a potęga
osi wiskupij. Wp dla ziemi potęgi wynosi $a = 1$

$$e = 0.01678, \text{ znajdzie się } 4173 \text{ i } 4036 \text{ t.j.}$$

największe i najmniejsze chybaż w milach
geograf. na już sekundę czasu podnago.

Dla komety z r. 1680 analizy Bessel

$$a = 426.774 \text{ promieni drogi ziemskiej, zaś}$$

$$e = 0.9999854 \text{ w rzniach } a, \text{ z temi wż}$$

wartościami znajdzie się chybaż największe

$$= 73.577 \text{ mil gozr. a najmniejsze}$$

$$= 0.000636 \text{ } \approx 12 \frac{1}{2} \text{ stop.}$$

$$y = \frac{L \sin \alpha}{\sin(\varphi + \psi) \sin(\varphi - \psi)}$$

a protein $\times \frac{a-b}{a} = \frac{1}{x}$

$$e = 2.5K - \frac{4}{x}$$

a potim $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2.4}e^4 + \frac{1.3}{2.4.6}e^6 + \dots$

$\frac{a-b}{a}$

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Seien x, x_1, x_2, x_3, \dots die durch Beobachtungen unmittelbar erhaltenen Größen z. B. die Höhen des Beobachtungsortes, und N die Anzahl der Beobachtungen. Sind diese Beobachtungen alle von gleicher Wertsche, so dass man in Beziehung auf ihre Genauigkeit keinen Unterschied machen kann, so ist der wahrscheinlichste Wertsche dieser Größen, den wir durch \bar{x} bezeichnen wollen, gleich dem arithmetischen Mittel d. h. es ist

$$\bar{x} = \frac{x + x_1 + x_2 + x_3 + \dots}{N}$$

oder wenn man die Kürze wegen $\Sigma x = x + x_1 + x_2 + x_3 + \dots$ setzt, so ist

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{N}$$

Es sei nun ε der Unterschied zwischen diesem wahrscheinlichsten Wertsche \bar{x} unserer Größe und dem unmittelbaren Resultate x der ersten Beobachtung, oder es sei

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \bar{x} - x \quad \text{und eben so} \\ \varepsilon_1 &= \bar{x} - x_1 \quad \text{für die zweite} \\ \varepsilon_2 &= \bar{x} - x_2 \quad \text{für die dritte} \\ &\dots \end{aligned}$$

Man kann diese Größen $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ als die Fehler der einzelnen Beobachtungen ansehen. Berechnet man weiter die Kürze wegen die Summe der Quadrate $\varepsilon^2, \varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \dots$ durch $\Sigma \varepsilon^2$, so dass $\Sigma \varepsilon^2 = \varepsilon^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots$ ist, so heißt die Größe

$$P = \frac{N^2}{2 \Sigma \varepsilon^2}$$

das Gewicht jener Bestimmung von \bar{x} als des wahrscheinlichsten Wertsches von x . Man sieht, dass

diejes Gewicht desto größer sein wird, je größer die Anzahl N der Beobachtungen und je kleiner die Größen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ d. h. je genauer diese Beobachtungen selbst sind.

Nennt man den Φ den mittleren zu befürchtenden Fehler, den man bei der Bestimmung der Größe X begangen haben mag, so ist

$$\Phi = \frac{1}{2\sqrt{VP}} = \frac{0.287095}{\sqrt{VP}}$$

wo $\pi = 3.1415926$. Dieser mittlere zu befürchtende Fehler Φ ist die Summe des Producte jedes Fehlers der einzelnen Beobachtung in seine Wahrscheinlichkeit. Von diesem mittleren zu befürchtenden Fehler unter, versteht sich der wahrscheinliche Fehler F , den man bei dieser Bestimmung von X begangen haben kann. Dieser Fehler F ist nämlich derjenige, von dem es gleich wahrscheinlich ist, dass man ihn begangen oder dass man ihn auch nicht begangen habe. Dieser wahrscheinliche Fehler ist

$$F = \frac{0.4769363}{\sqrt{VP}}$$

Die beiden Fehler Φ und F beziehen sich auf das Resultat X , welches man aus den einzelnen Beobachtungen x_1, x_2, x_3, \dots abgeleitet hat. Nennt man nun oben so f den wahrscheinlichen Fehler jeder einzelnen dieser Beobachtungen, so ist

$$f = 0.4769363 \sqrt{\frac{VP}{N}},$$

und die wahrscheinliche Gränze dieses Fehlers ist

$$f \pm \Delta f = f \left(1 \pm \frac{0.4769363}{\sqrt{N}} \right),$$

wo in allen diesen Ausdrücken wegen der Wurzelzeichen die dazwischen stehende GröÙe, immer mit dem doppelten Zeichen \pm verstanden wird. Der letzte Ausdruck sagt daher, dass der wahre, wirklich stattfindende Werth von f zwischen die Gränzen

$$f \left(1 + \frac{0.4769363}{\sqrt{N}} \right) \text{ und } f \left(1 - \frac{0.4769363}{\sqrt{N}} \right)$$

fallen wird, oder dass man 1 gegen 1 wetten kann, dass der wahre Werth von f zwischen diese beiden GröÙen fallen wird. —

Um die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass eine der bisher betrachteten GröÙen z. B. Φ zwischen zwei willkürliche Gränzen falle, so lieÙ sie w ; die Wahrsch. ist dann dass Φ zwischen den Gränzen $\pm \frac{r}{\sqrt{P}}$ liege, wo r eine willkürliche GröÙe, und $P = \frac{N}{2 \sum \epsilon^2}$ ist,

und daher $w = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^r e^{-\frac{r^2}{P}} dr$ wo $e = 2.7182818$

die Basis des natürlichen Logarithmen ist und das Integral von $r=0$ bis $r=\frac{r}{\sqrt{P}}$ genommen wird. Aber

$$\int_0^r e^{-\frac{r^2}{P}} dr = r - \frac{r^3}{3} + \frac{1}{1.2} \frac{r^5}{5} - \frac{1}{1.2.3} \frac{r^7}{7} + \frac{1}{1.2.3.4} \frac{r^9}{9} - \dots$$

oder

$$\int_0^r e^{-\frac{r^2}{P}} dr = \frac{r}{e^{\frac{r^2}{P}}} \left\{ 1 + \frac{2r^2}{1.3} + \frac{(2r^2)^2}{1.3.5} + \frac{(2r^2)^3}{1.3.5.7} + \dots \right\}$$

und wenn $r > 1$ ist, so findet man

$$\int_0^1 e^{-x} dx = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2x} \right) \left\{ 1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1.3}{(2x)^2} - \frac{1.3.5}{(2x)^3} + \frac{1.3.5.7}{(2x)^4} - \dots \right\}$$

z.B. für $x = 0.4769363$ ist $w = 0.5$
 $x = 1.0000000$ - - - $w = 0.8427008$
 $x = 2.7510654$ - - - $w = 0.9999$
 $x = \infty$ - - - $w = 1$

Wir haben bisher die einzelnen Beobachtungen ohne Unterschied von gleichem Werthe vorausgesetzt. Es seien nun $c_1, c_2, c_3, c_4, \dots$ die respectiven Gewichte von jeder Beobachtung oder jeder Bestimmung, so hat man für den wahrscheinlichsten Werth des Resultates

$$X = \frac{c_1^2 x_1 + c_2^2 x_2 + c_3^2 x_3 + c_4^2 x_4 + \dots}{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 + \dots} = \frac{\sum c^2 x}{\sum c^2}$$

Die Genauigkeit des Resultates oder des Werthes X ist $G = \sqrt{\sum c^2}$

Das Gewicht $P = \frac{N \cdot \sum c^2}{\sum c^2 \epsilon^2}$ wo $\epsilon = X - x$ i. d. d.

Der mittlere auszuführende Fehler $\Phi = \frac{0.282095}{\sqrt{P}}$

Der wahrscheinlichste Fehler $F = \frac{0.4769363}{\sqrt{P}}$

Der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung deren Genauigkeit als Einheit genommen wird $f = 0.47694 \sqrt{\frac{\sum c^2}{P}}$

Ausdruck des wahrscheinlichsten Fehler der ersten
 Beobachtung ist $\frac{f}{\sqrt{\Sigma C^2}}$. Der zweitens $\frac{f}{\sqrt{\Sigma C^2}}$ der
 dritten $\frac{f}{\sqrt{\Sigma C^2}}$ u. s. w. $\frac{f}{\sqrt{\Sigma C^2}}$ der zweiten $\frac{f}{\sqrt{\Sigma C^2}}$ der
 dritten $\frac{f}{\sqrt{\Sigma C^2}}$ u. s. w.

Die Grenzen von f sind

$$f \pm \Delta f = f \left(1 \pm \frac{0.47694}{\sqrt{\Sigma C^2}} \right)$$

Es werde nun durch eine Anzahl von Beobachtungen
 irgend eine Größe gesucht, deren Worth man schon
 beinahe kennt. D.h. für welche man schon einen
 näherenden analytischen Ausdruck hat, man
 soll diesen Ausdruck durch Hilfe jener Beobach-
 tungen genauer bestimmen. Nehmen wir folgend
 ein Beispiel. Die Längen und die Länge A für
 die geographische Breite φ werde durch den Aus-
 druck

$$A = 439.23 + 2.39 \sin^2 \varphi$$

in Pariser Linien gegeben, welchen aber die bei-
 den constanten Größen 439.23 u. 2.39 noch nicht
 als ganz genau angesehen werden und daher eines
 Verlässers bedürfen. - Setzen diese zu suchenden
 verlässerten Worth 439.23 + x , und 2.39 + y .

Hat man nun nur ein Beispiel der Breite φ diese Parabel
 durch unmittelbare Beobachtung gleich B gefunden,
 und nimmt man an, daß auch diese Beobachtung
 nicht ganz richtig ist und das der wahre nach
 unbekante Worth dieses Resultates gleich $B + \varepsilon$ ist,

wo also ε den Fehler der Beobachtung bezeichnet,
so hat man, da sowohl $B+\varepsilon$ als auch

$$439.23 + x + (2.39 + y) \sin^2 \varphi$$

den wahren Ausdruck der Pendellänge vorstellt,

$$B+\varepsilon = 439.23 + x + (2.39 + y) \sin^2 \varphi$$

und wenn man davon die vorhergehende Gleichung,
abzieht $B-A+\varepsilon = x + y \sin^2 \varphi$

oder wenn man $B-A = d$ setzt

$$\varepsilon = x + y \sin^2 \varphi - d$$

welches also daher die Bedingungsgleichung die,
der Beobachtung ist. Wir wollen diese Gleichung
so darstellen $\varepsilon = ax + by - d$

Eine zweite Beobachtung gibt ebenso

$$\varepsilon_1 = a_1 x + b_1 y - d_1$$

eine dritte

$$\varepsilon_2 = a_2 x + b_2 y - d_2 \text{ a. f. w.}$$

und es wird nun darum zu thun seyn, diejeni-
gen Werthe von x und y zu finden, welche allen
diesen Gleichungen am besten entsprechen.

Diese Werthe von x und y werden aber diejeni-
gen seyn, für welche die Summe der Quadrate
des Beobachtungsfehlers $\varepsilon^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \dots = \sum \varepsilon^2$

ein Minimum ist, oder für welche $d. \sum \varepsilon^2 = 0$

Da aber die Grössen x und y im Allgemeinen von
einander unabhängig sind, so ist die letzte Gleichung
folgendermaßen leicht geltend

$$\left(\frac{d. \sum \varepsilon^2}{dx} \right) = 0 \text{ und } \left(\frac{d. \sum \varepsilon^2}{dy} \right) = 0$$

Die erste dieser Gleichungen gibt

$$x \sum a^2 + y \sum ab - \sum ad = 0$$

Die zweite

$$y \sum b^2 + x \sum ab - \sum bd = 0$$

(I)

Durch die Elimination gehen diese zwei letzten Gleichungen in eine wahrscheinlichsen Werthe von x und y die wir X und Y nennen wollen

$$X = \frac{\sum b^2 \sum ad - \sum ab \sum bd}{\sum a^2 \sum b^2 - (\sum ab)^2} \quad \text{und}$$

$$Y = \frac{\sum a^2 \sum bd - \sum ab \sum ad}{\sum a^2 \sum b^2 - (\sum ab)^2}$$

$$\text{oder } X = \frac{\sum b^2 \sum ad - \sum ab \sum bd}{N}$$

$$Y = \frac{\sum a^2 \sum bd - \sum ab \sum ad}{N}$$

indem man $N = \sum a^2 \sum b^2 - (\sum ab)^2$ setzt.

Kennt man aber diese wahrscheinlichsten Werthe X und Y der beiden Größen x und y , so findet man die Gewichte P_x und P_y dieser Bestimmungen der Resultate von X und Y , so wie die wahrscheinlichsten Fehler F_x und F_y dieser beiden Größen durch folgende, den bereits vorhin gegebenen analogen Ausdrücke

$$P_x = \frac{N}{\sum \varepsilon^2 \sum b^2 \sum \varepsilon^2}, \quad P_y = \frac{N}{\sum \varepsilon^2 \sum a^2 \sum \varepsilon^2}$$

wo $\varepsilon = ax + by - d$, $\varepsilon_1 = a_1x + b_1y - d_1$ u. s. w.

oder ε ist der Werth von $ax + by - d$, wenn man für x und y die oben gefundenen wahrscheinlichsten Werthe X und Y setzt.

$$F_x = \frac{0.47694}{\sqrt{P_x}}, \quad F_y = \frac{0.476911}{\sqrt{P_y}}$$

eben so sind die mittleren aufzufindenden Fehler

$$\bar{F}_x = \frac{0.28209}{\sqrt{P_x}}, \quad \bar{F}_y = \frac{0.28209}{\sqrt{P_y}}$$

Um die Genauigkeit oder die Präzision C_x und C_y des Beobachters zu finden, die wahrsch. wahrscheinlichen Fehler f der einzelnen Beobachtung und endlich die Gröszen dieses Fehlers $f + Af$ zu finden, drücken wir die beiden Gleichungen (I) so aus

$$x = -\sum ad + x \sum a^2 + y \sum ab$$

$$y = -\sum bd + y \sum b^2 + x \sum ab$$

durch die Methode der Elimination liest man andere Gleichungen aus diesen, welche x und y durch ξ und η gebildet, diese werde folgende Form haben

$$x = L + A\xi + B\eta$$

$$y = L' + A'\xi + B'\eta$$

so sind $x = L$ und $y = L'$ die wahrsch. wahrscheinlichsten Werte dieser Gröszen oder es ist $X = L$ und $Y = L'$ übereinstimmend mit Vorigem, wenn $\xi = \eta = 0$ gesetzt wird. Die Genauigkeit dieser Bestimmung von X und Y , wenn man die Genauigkeit der einzelnen Beobachtungen zur Einheit annimmt, ist

$$C_x = \frac{1}{\sqrt{A}}, \quad C_y = \frac{1}{\sqrt{B'}}$$

Endlich ist der wahrsch. kleinste Fehler f jeder einzelnen Beobachtung

$$f = F_x \cdot C_x = F_y \cdot C_y$$

Sind die einzelnen Beobachtungen von ungleicher Güte, und ist z.B. C_1, C_2, C_3, \dots der Wert bei der ersten, zweiten u. s. w. so wird man die gegebenen Bedingungs-gleichungen außer dem ξ durch die Gröszen C_1, C_2, \dots multiplizieren und dann mit ihnen, wie zuvor, verfahren. —

Ylche

Tafel I.

+1	1
-10	11.2
9	
8	
7	
6	
5	11.26
4	
3	
2	
1	
0	
+1	
2	
3	
4	
+5	

Tafel I.

9	11.2
8	11.2
7	11.2
6	11.2
5	11.2
4	11.2
3	11.2
2	11.2
1	11.2
0	11.2
+1	11.2
2	11.2
3	11.2
4	11.2
5	11.2
6	11.2
7	11.2
8	11.2
9	11.2
10	11.2
11	11.2
12	11.2
13	11.2
14	11.2
15	11.2
+16	11.2

Höhenmessen mit dem Barometer

Tafel I. Argument: Summe der Temperaturen der beiden barometrischen Thermometer.

t+t'	A	t+t'	A	t+t'	A	t+t'	A
-10°	4.25037	+6°	4.26980	+20°	4.28664	+35°	4.30092
9	448	6	4.27087	21	667	36	192
8	560	7	195	22	770	37	291
7	671	8	301	23	874	38	391
6	781	9	408	24	976	39	490
5	892	10	514	25	4.29079	40	589
4	4.26002	11	620	26	181	41	688
3	111	12	726	27	283	42	787
2	220	13	832	28	385	43	886
1	330	14	937	29	487	44	984
0	439	15	4.28012	30	588	45	4.31082
+1	548	16	147	31	689	46	179
+2	657	17	251	32	790	47	277
+3	765	18	356	33	891	48	374
+4	872	19	460	34	991	49	471
+5	980	+20	564	+25	4.30092	+50	668

Tafel II. Argument: Breite des Ortes.

Q	Corr.	Q	Q	Corr.	Q	Q	Corr.	Q
0°	+124-	90	15	+107-	75°	80°	+62-	60°
1	123	89	16	105	74	81	58	59
2	123	88	17	102	73	82	54	58
3	123	87	18	100-	72	83	60	57
4	122	86	19	97	71	84	46	56
5	122	85	20	95	70	85	42	55
6	121	84	21	92	69	86	38	54
7	120	83	22	89	68	87	34	53
8	119	82	23	86	67	88	30	52
9	118	81	24	83	66	89	26	51
10	116	80	25	79	65	90	21	50
11	115	79	26	76	64	41	17	49
12	113	78	27	73	63	42	13	48
13	111	77	28	69	62	43	9	47
14	109	76	29	65	61	44	4	46
15	+107-	75	30	+62-	60	45	+0-	45

Tafel III. Argument: v							
v	Corr.	v	Corr.	v	Corr.	v	Corr.
1.9	+ 1	2.7	+ 3	3.2	+ 11	3.7	+ 34
2.3	1	2.8	4	3.3	14	3.8	43
2.4	2	2.9	5	3.4	17	3.9	54
2.5	2	3.0	7	3.5	22		
2.6	+ 3	3.1	+ 9	3.6	+ 27		

Gebrauch der Tafeln

Es sey t und t' Temperatur der Luft der unteren und oberen Station nach Réaumur, T und T' die Temperatur des Quecksilbers nach Réaumur, b und b' Barometerhöhe der unteren und oberen Station in beliebigem Maße.

Man setze $(\log b - 10T) - (\log b' - 10T') = u$
 1. $10T$ und $10T'$ als Einheiten der 5ten Dreimalen, so
 trachtet z. B. $T = +15.4$, so werden der $\log b$ mit
 154 Einheiten in der letzten Stelle verheftet;
 ferner $\log u + A + \text{Corr.}$ aus der II. Tafel = v ; so ist
 v , corrigirt durch die III. Tafel, Logarithmus der
 Erhöhung der oberen Station über der unteren in
 Metern ausgedrückt, und vermehrt durch 9.71018, wird
 sie in Toisen seyn.

Beispiel $t = 15.3$, $T = 14.9$, $b = 735.581$ $\varphi = 45^\circ$
 $t' = 3.2$, $T' = 7.8$, $b' = 557.203$

$$\begin{array}{r|l}
 \log b = 2.86663 & \text{Corr.} - 149 \\
 \log b' = 2.73014 & \text{---} - 78 \\
 \hline
 u = 0.13649 & \text{---} - 71 \\
 \hline
 u = 0.13578 &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \log u = 9.13784 \\
 A = 4.28407 \\
 \text{Corr.} = 0 \\
 \hline
 v = 3.41691 + \text{Corr. } 18 = 3.41709 = \\
 = \log 2612.7 \text{ Meter}
 \end{array}$$

H. T. ... 1850

unteren
T'rie
; bunc
Station

male, be,
agt mit
l. l. l.

Corr.
+34
43
54

unteren
T'rie
; bunc
Station

male, be,
agt mit
l. l. l.

Corr.
+34
43
54

Beim

Eine

nach einer

eine

romie d

oder Thes

rologie

Temperat

sie die 2

ich die

Geburts

temperat

Wasser

immer

bleibt

gleich

vermehrt

$$y_x = \frac{p}{10} + 11$$

in welcher

Wasser

Bestimmung der Gesetze einer periodischen Erscheinung

Eine Erscheinung, deren mannigfache Beobachtungen nach einer bestimmten Zeit wiederkehren; nennt man eine periodische Erscheinung, wie z.B. in der Astronomie die Elemente einer Planetenbahn, die Längen oder Rectascensionen eines Planeten; in der Meteorologie der jährliche oder tägliche Gang der mittleren Temperatur und des mittleren Luftdrucks, in der Physik die Declination der Magneten, in der Statistik die in gewissen Zeiträumen vorfallenden Geburts- und Sterbefälle u. s. w. scilicet.

Wenn nun die periodische Erscheinung nach dem Ablaufe ihrer Periode stets wiederkehrt, und dabei immer von der unveränderlichen Größe y abhängig bleibt, so kann die Eigenschaft, dass y stets gleich bleibt, wenn auch x um k , $2k$, $3k$, u. s. w. vermehrt oder vermindert wird durch die Gleichung

$$y_k = p_0 + u_1 \sin\left(u_1 + \frac{2\pi}{k}x\right) + u_2 \sin\left(u_2 + \frac{2\pi}{k}2x\right) + \dots$$

in welcher $2\pi = 360^\circ$, p_0 , u_1 , u_2 , ..., u_1 , u_2 , ... Constanten bezeichnen, vollständig ausgedrückt werden. Wenn man also, sagt Laplace, diese Constanten aus einer Beobachtungsergebnisse zu bestimmen, so erhält man nicht durch die mathematische Theorie der Erscheinung entwickelt. Sondern sie den Beobachtungen entsprechend gewählt werden, so muß es sich auf eine solche Art geschehen, daß sie die aus den Beobachtungen resultierende Kurvenstellung, die in der That nicht anders als das Resultat der Beobachtungen in der conceipiblen Form ist, vollständig ergibt.

Wenn die empirisch gefundenen Werthe von y , auf welche man die Entwicklung gründen will, zu in arithmetisches Reihe fortschreitenden und die ganze Periode ausfüllenden Werthen von x gehören, so ist die Bestimmung der Constanten am einfachsten und leichtesten. Sie besteht in Folgenden

$\Sigma = (y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n-1}^2) - n p^2 - \frac{n}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \dots) - \frac{n}{2}(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + \dots)$
aus welcher Gleichung man ersieht, dass man die Summe der Quadrate der Fehler, die nach der Hinzufügung jedes neuen Glieds, noch übrig bleibt, ohne vollständige Rechnung augenblicklich finden kann, und dass man folglich die Rechnung selbst nicht wieder fortzusetzen braucht, als bis man zu derjenigen Verkleinerung dieser Summe Σ gelangt ist, bei welcher man sich ohne Nachsehen begnügen kann. Subjektiv ist das Gewicht von p durch die GröÙen n , das von $p_1, p_2, \dots, q_1, q_2, \dots$ durch die GröÙen $\frac{1}{2}n$ gegeben —

Die oben gegebenen HilfsgröÙen p, q_1, \dots z. B. für $n=12$ sind also $2 = 30$ sind folgende:

$$p = \frac{1}{6} \{ (y_0 - y_6) + (y_1 - y_5 - y_7 + y_{11}) \cos 30^\circ + (y_2 - y_4 - y_8 + y_{10}) \cos 60^\circ \}$$
$$q_1 = \frac{1}{6} \{ (y_3 - y_9) + (y_1 + y_5 - y_7 - y_{11}) \sin 30^\circ + (y_2 + y_4 - y_8 - y_{10}) \sin 60^\circ \}$$
$$p_2 = \frac{1}{6} \{ (y_0 - y_3 + y_6 - y_9) + (y_1 - y_2 - y_4 + y_5 + y_7 - y_8 - y_{10} + y_{11}) \cos 60^\circ \}$$
$$q_2 = \frac{1}{6} \{ (y_1 + y_2 - y_4 - y_5 + y_7 + y_8 - y_{10} - y_{11}) \sin 60^\circ \}$$

und die Gleichung zur Bestimmung von y_x
 $y_x = p_0 + u_1 \sin(\alpha_1 + 30^\circ \cdot x) + u_2 \sin(\alpha_2 + 60^\circ \cdot x)$

Die meteorologische Station temperature mijscia 2 speculatio
geograficna i inqnieficia nad pocienichnis moro
pudije Dr. H. F. Kiliu najstijmjezovno
alla fudnij romij. 45° dalt $\Phi = (18^\circ 1' + 0^\circ 00' 85 h)$
alla Klimijfud. str. b. j. 38° dalt $\Phi = (22^\circ 4' + 0^\circ 00' 77 h)$
alla lat. (orov. lip. n. j. p. p.) 58° dalt $\Phi = (17^\circ 6' + 0^\circ 00' 82 h)$
w Kijepel temperature jist u ftopmich fethovno termom.
a h uqnieficia nad more u melnach imprione orar
 Φ mory fudovij zecgr. mijca.
Etrymane temperatur. a naroru more bji bldm ± 0.4
zas a 2) i 3), ± 0.7

Page 97 = A
Ri

$$A-O-W + (NO + SO - SiV - NiV) \cdot \angle 45^\circ$$

$$B = N - S + (NO + NW - SO - SW) \cos 45^\circ$$

Die Punkte in \mathbb{R}^2 fallen unter "Kraft der Linie"
 also ist $= \sqrt{A^2 + B^2}$

$$I_n' = t + u' \sin(n, 45^\circ + \theta_1) + u'' \sin(n, 90^\circ + \theta_2)$$

Für die bekannte Triefche Weildroge haben wir

$$D_n = b + u' \sin(n.45^\circ + U_1) + u'' \sin(n.90^\circ + U_2)$$

Cosmos 26 kwietnia, r. 1863

86

Angielski dziennik "Illustrated London News" podaje następujące statystyki królestwa Wielkiej Brytanii:

Łódź męska na królestwie jest 128.8 milionów
z których 369 mil. rasę kaukaską, 552 mil. rasę mongolską,
190 mil. rasę europejską, 1 mil. indyjską, 1 mil. amerykańską,
a 126 mil. rasę malajską.
Współlicząc rasę młodzi, 3642 przykładami a wynosi 1000
triumfować.

Corocznie umiera 33333333 ludzi, t.j. 91554 codziennie
czyli 3780 w godzinę albo 60 w minutę, a zatem co sekundę,
ale jeden człowiek. Każde przeto uderzenie jednej z kłosek,
jest zarazem i natężeniem i zgonem człowieka. Ten a taki uderzenie
nie wynagradza się wprost, ponieważ świat nie wie, co to jest.
Irealnie życie człowieka w ogólności na całej ziemi 33 lat.
Łudności umiera przed osiągnięciem lat siedemdziesięciu, a
Łudności przed osiągnięciem lat 17-ku.

Wzrost tylko u człowieka na 10000 dochodzi lat 100;
jeden także tylko na 500 dochodzi lat 90 życia
i jeden na 100, przeto do lat 60.

Dziś umierają na wojnę, są w ogólności mocniejsi niż
urodzeni w innej porze roku.

Największą rzadzi się i umiera ludzi, w nocy.

1/3 ogólnej ludności zdołała być do wojny;

Sposób zatrudnienia ma wielki wpływ na długość życia.

Stak: z 1000 osób dosięga 60 lat życia, 42 księżki, 40

rolników kupców i przemysłowców - 33 do trzech, 32

urzędników, 32 inżynierów, 29 adwokatów, 27 prawników,

lekarzy a lekarzy 24. A tak dziwnie zjawiskiem, że

który powołuje się na życie na społeczeństwo i sposobów prze-

ciśnienia i innych życia, umiera najwcześniej. Jest do 200

lat. choć głębiej rzecz, a może i głębiej, natura.

Na całej królestwie jest 333 mil. chrześcijan, 5 mil.

izraelitów, 60 mil. wyznających jedną z liczących uin-

aryjskich, 160 mil. mahometanów a 200 mil. pogan.

Z pomiędzy chrześcijan jest 170 mil. katolików, 70 mil.

76 mil. religii greckiej a 80 mil. protestantów.

Łudność na całym świecie jest w ogólności 400 mil. ludzi, a

dzie do 1000 osób żyje w ogólności 40 lat życia, a

na 1000 osób żyje 66 i wesele i żegnają przepadają

na miesiąc czerwiec i grudzień i t. d.

Mary dróme

Kilometr albo mila (mille) = 1000 metr = 513 łokci

Myriometr — mila nowa = 10 kilometr = 10 mille

Mary ategom angliini pawa

Decametr = Perche nouvelle = 10 metrów

Decimetr = Palme — — — = $\frac{1}{10}$ metr

Centimetr = Doigt — — — = $\frac{1}{100}$ —

Millimetr = Trait — — — = $\frac{1}{1000}$ —

Mary de gromtain

Heclare = Arpent = 100 Arcs

Arc — — = Perche carrée = 100 metrów kwadratowych

Centiare = Mètre carré = Mètre carré

Mètre carré — — — = 100 decim. ou palmes carr.

Decimètre carré = Palme carrée = 100 centim. ou doigts carrés

Mary ob ptoia alla pty pawa

Decalitre = Velle — — — = 10 Litres

Litre = Pinse — — — = $\frac{1}{10}$ decim. cube

Decilivre = Verre — — — = $\frac{1}{10}$ Litre

Pharmacopoea syriaca

Vibulitre = Muad = 10 Heclolitre

Heclolitre = Sether = 10 Decalitre

Decalitre = Boissieu = 10 Litres ou Litrons

Litre — — = Litron

50 kilogram. = 89'28375 funt. waiden.

100 plog. kwadrat. waiden. = 9'9925 metrów kwadrat.

10 kilogram. = 17'8567510 funt. waiden.

1000700 platowiskich jak Francysja po kraj, i
cały niemcy

Wady jesi 3832000 kilometrów kwadrat

Ląka — 12660000

3. bis
mille

Reduction der allgemeinen Längenmaße mittelst Logarithmen.

87

Zu dem Logarithmus des (Addire) um zu erhalten den Logarithmus des

Bayerischen Klaffers 0.2433247

" Fuß 0.4651734-1

" Zoll 0.3859922-2

" Linien 0.3068110-3

Dänischen Klaffer 0.2748765

" Fuß 0.4967252-1

" Zoll 0.4175440-2

" Linien 0.3383628-3

Englischen Yard 0.9611284

" Fuß 0.4840071-1

" Zoll 0.4048259-2

" Linien 0.3256447-3

Französischen Toisen 0.2898200

" Fuß 0.5116687-1

" Zoll 0.4324875-2

" Linien 0.3533063-3

Niederländischen Palm 0.0000000-1

Oesterreichischen Klaffer 0.2779790

" Fuß 0.4998277-1

" Zoll 0.4206465-2

" Linien 0.3414653-3

Russischen Klaffer 0.2748783

" Fuß 0.4967870-1

" Zoll 0.4175458-2

" Linien 0.3383646-3

Meter

um zu erhalten den Logarithmus des subtrahire von dem Logarithmus des

Um den Logarithmus der addire um zu erhalten den Logarithmus der

Russischen Faden	0.3292890-1	} Meter
Sächsischen Klaffen	0.2294086	
" Fuß	0.4512573-1	
" Zoll	0.3720761-2	
" Linien	0.2929949-3	
Schwerischen Klaffen	0.2506702	
" Fuß	0.4725189-1	
" Zoll	0.3933377-2	
" Linien	0.3141565-3	
Polnischen Klaffen	0.2387485	
Polnischen Fuß	0.4665972-1	} Pariser Fuß
" Zoll	0.3814760-2	
" Linien	0.3022948-3	
Polnischen Fuß	0.8489725-1	
" "	0.9607099-1	
" "	0.9765908-1	} Englischen Fuß
" "	0.9638709-1	
" Klaffen	0.9094593-1	Petersburg Klaffen

Um zu erhalten den Logarithmus der Subtrahire von dem Logarithmus der

Aus der Baumgarten'schen Naturlehre
Supplementbände

Ein Paris. Fuß = 144.00 Paris. Linien

Wiener Fuß = 140.13 —

Missin's Fuß = 135.10 —

Bairischer Fuß = 129.38 —

Englischer Fuß = 145.07 —

Meter = 443.296 —

Der provisorische Meter hatte 3,079 458 Par. Fuß

Es ist aber schon außer Gebrauch

1 Meter Par. Toisen = 30.94133 = 443.2959 (a)

1 Toise = 1.949037 Meter

1 Par. Fuß = 0.3248394 Meter

1 Myriameter = 10,000 Meter

1 Kilometer = 1,000 —

1 Hektometer = 100 —

1 Decameter = 10 —

1 Decimeter = $\frac{1}{10}$ —

1 Centimeter = $\frac{1}{100}$ —

1 Millimeter = $\frac{1}{1000}$ —

113 Nach dem Vaucler's m. s. Schenck'sches Gut. nach

(a) für 1836: / ist das Original-Meter des Längens,
bureau = 0.513060 Paris. Toisen = 36.3708 Engl. Zoll

1 Paris. Fuß = 12.78183 Englische Zoll

Dove, Haas und Heppner p. 39

1143296 paris. Linien = 39' 37" 062 englische Zoll
der her

1 Toise = 6' 39" 456 399 englische Fuß

oder 1 Toise = 6' 39" 456 399 englische Fuß
(Königliche Akademie, Toise de Pérou)

1797. Determination of the Longitude of Valparaiso
p. 228. in Folge seiner Unternehmung in dem A.
Lichtfigure of the earth, in der Encyclopædie
Méthodique, und angenommen

Halbe große Axe $a = 20923713$ engl. Fuß

— kleine — $b = 20853810$ —

Abplattung = $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{798378}$

Parallèle d'Arcue mesurée à l'équateur 2 Mesurungen
in Hella angesehene = 8" 57' 116" weit

— d'Arcue d'Arcue d'Arcue = Arc 8" 57' 116"

— d'Arcue d'Arcue d'Arcue = Arc 8" 57' 116"

— d'Arcue d'Arcue d'Arcue = Arc 8" 57' 116"

— d'Arcue d'Arcue d'Arcue = Arc 8" 57' 116"

— d'Arcue d'Arcue d'Arcue = Arc 8" 57' 116"

— d'Arcue d'Arcue d'Arcue = Arc 8" 57' 116"

— d'Arcue d'Arcue d'Arcue = Arc 8" 57' 116"

— d'Arcue d'Arcue d'Arcue = Arc 8" 57' 116"

— d'Arcue d'Arcue d'Arcue = Arc 8" 57' 116"

— d'Arcue d'Arcue d'Arcue = Arc 8" 57' 116"

— d'Arcue d'Arcue d'Arcue = Arc 8" 57' 116"

— d'Arcue d'Arcue d'Arcue = Arc 8" 57' 116"

Pariser Fuß

89

Fuß Toisen Meter Englischer Fuß und Zolle

1000	166.66667	324.83938	1065	9.1832
2000	333.33333	649.67877	2131	6.3664
3000	500.00000	974.51815	3197	3.5496
4000	666.66667	1299.35754	4263	0.7328
5000	833.33333	1624.19692	5328	9.9160
6000	1000.00000	1949.03631	6394	7.0992
7000	1166.66667	2273.87569	7460	4.2825
8000	1333.33333	2598.71508	8526	1.4657
9000	1500.00000	2923.55446	9591	10.6489

Millim. Pariser Linien Englische Zolle Paris, Millimeter Englische Zolle

100	44.330	3.9371	1	27.070	1.0655
200	88.659	7.8742	2	54.140	2.1315
300	132.989	11.8112	3	81.210	3.1972
400	177.318	15.7483	4	108.280	4.2631
500	221.648	19.6854	5	135.350	5.3288
600	265.978	23.6225	6	162.420	6.3946
700	310.307	27.5596	7	189.490	7.4604
800	354.637	31.4966	8	216.560	8.5261
900	398.966	35.4337	9	243.630	9.5919

Toisen und Meter

10	270.699	10.6577
11	297.769	11.7234

Toisen

Meter

Meter

Toisen

Englischer Fuß und Zolle

1000	1949.03631	1000	512.07107	3280	10.7900
2000	3898.07262	2000	1026.14215	6561	9.5800
3000	5847.10893	3000	1539.21222	9842	8.3700
4000	7796.14524	4000	2052.28230	13123	7.1600
5000	9745.18155	5000	2565.35237	16404	5.9500
6000	11694.21786	6000	3078.42244	19685	4.7400
7000	13643.25417	7000	3591.49252	22966	3.5300
8000	15592.29048	8000	4104.56259	26247	2.3200
9000	17541.32679	9000	4617.63267	29528	1.1100

francuska mila jakich 18 na 1^o marula = ^{melba} 7408
 mila narwana Leue jakich 25 na 1^o marula = 4445

Abj. uje samienie francuskie Leue
 1 stopich 125 to angloski w delach 1/10
 samienych na mile geograficzne
 t.j. jakich 18 i 1/2 na 1^o marula
 potrzeba pierwiec normniejszy jener
 4445 = 0'600027
 7408 = 0'600027

W mile francuskiej kromogeograficznej ujemne
 Leue (ktorych 125) jest 2280 toise

aby uje se mile samienie na geograficzne
 potrzeba je normniejszy jener 0'59938518
 to ujemny poprakiwan Enchezo

mila geograficzna = 3807'23463 Toise

W mile Angli popularne 1/2 normie popularne
 rachowane 1/2 millicie i odlytoci na mile

1/2 kilo ~~francuskie~~ czyli po 4000 metra

aby takie mile obracic na geograficzne
 potrzeba je normniejszy jener ~~0'59938518~~ 0'593705

1. mila geogr. = 3912'467 stopi = 23474'8 stop ucienci.

1 mila niemiecka = 1'0223726 mil geogr.

1 mila niemiecka \square / 10000 norzgo (20.6) : f = 1'64524577 noli

1 mila angielska = 1'60931 kilometra geogr. \square

" geogr. czyli morska = 1'85185 kulom.

M. austryjska = 4000 toise = 24000 stop = 7'5864 kil.

M. czeska = 22017 stop reiskuh = 6'91012 kilogr.

M. wloska = 1'85644 kulom.

M. węgierska = 8'35636 kilom.

M. badeńska = 8'88888 kilom.

M. franc. morska = 2850'411... toise

M. franc. porlowa = 2000 toise = 2 milles

80

Tablica wertow i ilosci mierzonych w Kacie
ryskego linijki

$$\begin{aligned} \pi &= 3'14159\ 26535\ 89793 \dots \quad \lg \pi = 0'49714\ 98726\ 9413 \\ \frac{1}{4}\pi &= 0'78539\ 81633\ 97448 \dots \quad \lg \frac{1}{4}\pi = 9'89508\ 98813\ 6617 \\ \frac{1}{6}\pi &= 0'52359\ 87755\ 98299 \dots \quad \lg \frac{1}{6}\pi = 9'71899\ 86223\ 1049 \\ \frac{1}{8}\pi &= 4'18879\ 02047\ 86391 \quad \lg \frac{1}{8}\pi = 0'37791\ 13906\ 9757 \\ \sqrt{\frac{1}{2}\pi} &= 1'24070\ 09817\ 99700, \quad \lg \sqrt{\frac{1}{2}\pi} = 0'09366\ 71258\ 9650 \\ \sqrt{\pi} &= 1'41421\ 35623\ 74659, \quad \lg \sqrt{\pi} = 0'15571\ 66242\ 3138 \\ \sqrt[3]{\pi} &= 1'77245\ 38509\ 05516, \quad \lg \sqrt[3]{\pi} = 0'24857\ 49363\ 4707 \\ \pi^2 &= 9'86960\ 44010\ 89359, \quad \lg \pi^2 = 0'99429\ 97453\ 8827 \\ \pi^3 &= 31'00627\ 66802\ 93493 \quad \lg \pi^3 = 1'49144\ 96180\ 8240 \\ \lg. \pi^4 &= 1'14472\ 98858\ 494 \dots \quad 0'05870\ 30212\ 3982 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1^\circ &= 0'01745\ 32925\ 14934\ 29577 \quad R^\circ = 57^\circ.29577 \\ 1' &= 0'00029\ 08882\ 08665\ 72166 \quad R' = 3437'74677 \\ 1'' &= 0'00000\ 48481\ 36881\ 09536 \quad R'' = 206264''.80824 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lg R^\circ &= 1'75812\ 26324\ 0917 \\ \lg R' &= 3'53627\ 38827\ 9282 \quad 360^\circ = 1296000'' \\ \lg R'' &= 5'31442\ 51331\ 7646 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 1^\circ &= 0'01745\ 24062\ 17275\ 54, \quad \lg \sin 1^\circ = 8'24185\ 53184\ 1831 \\ \sin 1' &= 0'00029\ 08882\ 04563\ 4246, \quad \lg \sin 1' = 6'46372\ 61108\ 248 \\ \sin 1'' &= 0'00000\ 48481\ 36811\ 0763608 \dots 4'68587\ 48668\ 2184 \\ \lg 1'' &= 0'00000\ 48481\ 36811\ 1527363 \dots 4'68587\ 48668\ 2694 \end{aligned}$$

Wskazywanie na podziałki obrotu

$$\begin{aligned} \sin 9 &= 0'01570\ 73173\ 11820\ 67675\ 4 \\ \sin 1' &= 0'00015\ 70732\ 724\ 82676754 \\ &\quad 03352565215 \\ \sin 1'' &= 0'00000\ 15707\ 96326\ 7947507 \\ \sin 1.5 &= 8'19610\ 20172\ 3855 \\ \lg \sin 1' &= 6'19611\ 98752\ 4419 \\ \lg \sin 1'' &= 4'19611\ 98770\ 2997 \end{aligned}$$

Robert R. Lytle was appointed Major May 1, 1859. Hon. 315.

Żeń. Φ wyraża szerokość geograficzną, ℓ odległość
pionową od poziomu morza, h wysokość
punktu

$$\text{od } \Phi = 0^\circ \text{ do } \Phi = 45^\circ \quad \ell = 39.016734 + 0.196326 \sin^2 \Phi^2$$

Wartość ℓ otrzymujemy z tabeli analitycznej
punktu $\Phi = 45^\circ$ $\ell = 39.37$ cali analitycz.
Wartość ℓ otrzymujemy z tabeli analitycznej
punktu $\Phi = 45^\circ$ $\ell = 993534239$ millim.
 $= 39.12$ cali analitycz.

Kolejnie ℓ można znaleźć przez
pochylenie pionowej słupki wzdłuż
głównego $g = \frac{1}{2} \ell \pi^2$ gdzie π oznacza

średni promień ziemi od poziomu do szerokości geograf.
który, wzdłuż $= \frac{1}{3} \sqrt{3}$ szerokości $35^\circ 15' 52''$ prawie
i który promień $= a - \frac{1}{3}(a-b)$ $\pi^2 = 3168766$
Ten średni promień oznacza się przez r a szerokość
geograficzną przez Φ , wyrażenie promienia ziemi
dla szerokości Φ będzie $r(1 - \varepsilon \sin^2 \Phi)$
gdzie $\varepsilon = \frac{1}{29436}$ π^2 jest stałą fizyczną.

W proporcji $x:y:z$

$$\text{jeżeli } \frac{(x-y)(y-z)}{(x-y)-(y-z)} = y$$

$$\text{bo } \frac{x-y}{y-z} = \frac{y}{z} \text{ więc } x-y = \frac{y(y-z)}{z} \text{ zatem}$$

$$(x-y)(y-z) = \frac{y(y-z)^2}{z} = \frac{y(y^2 - 2yz + z^2)}{z}$$

$$\text{bo } y^2 = xz, \text{ zatem } \frac{y^2 - 2yz + z^2}{z} = \frac{xz - 2yz + z^2}{z} = x - 2y + z = (x-y) - (y-z)$$

$$\text{a więc } y = \frac{(x-y)(y-z)}{(x-y)-(y-z)}$$

Friedrich Wilhelm Bessel umiart się 22. Lipca⁹³
1784 w Pruskiej - Minden. - W r. 1810 powołany do
Kancelarii jako Astronom przyb. d. 17. Maja 1846
umart.

Arage umart d. 21 Października 1853.

Alexander Humboldt umart się 21. Wierca 1769
umart d. 6. Maja 1859 o godz. 2½ popołudnia.

Ludność całej ziemi podług Bialbi w r. 1826, na 740
milionów dusz, Hoffmann w r. 1840 na 997 milionów.

Cannabich w r. 1847 na 1065 milionów

Berghaus w r. 1843 - 1272 -

Wöden w r. 1850 r. Handbuch der Erdkunde,

podaje ludność ziemi na 1360 milionów dusz

z których stądnie

na Australijs 4 miliony t.j. 340 całej ludności

Afryka	250	—	—	—	2
Azja	777	—	—	—	11
Ameryka	56	—	—	—	4
Europa	273	—	—	—	5

Libra dmiowawych obrot w wielcomiśpych bibliach,
tęch europejskich

w Paryżu biblijoteka cesarska	800000
Londynie Muzeum brytanickie	560000
Petersburgu biblij. cesar.	520000
Berlin	520000
Monachium	480000
Wapen haza	470000
Wiednia	365000
Edynburg	360000
Wrocław	350000
Drezno	305000

Londyn w r. 1801 zajmował Druki mnijsze poaciechus
nie w r. 1858 i miał mipskanców zakreś. 958863 dusz
w tym zaś ofsetum roku zajmował poaciechus 3¼ zrog. mit □
i miał mipskanców pnięto 2800000.

Um eine Billion zu zählen, vorausgesetzt das
man in einer Minute 60 zählt, und Tag und Nacht
fortzählt, brauchte ein einzelner Mensch
31709 Jahre 289 Tage, 1 Stunde, 46 Minuten
und 40 Sekunden, Oder wenn z. B. eine Billion
Thaler in einem Jahre gezählt werden soll, braucht
te man dazu 31709 Menschen, die ohne Unter-
brechung 60 in einer Minute zählen müssen.
Denkt man sich die Billion in Silber, ein
Thaler zu 1 Loth Gewicht, so müssen dazu
ausgeprägt seyn 312 Millionen und 500000
Zentner Silber. Dieser Last fortzuführen
wären nöthig 31 Millionen und 250.000 Pfer-
de, wenn jedes zu 10 Zentner an ziehen hätte.

Rechen-Maschinen

Leibnitz ^{Gott.} mit einem Aufwand von mehr als 24000 Th.
viele seiner Nebenstunden mehrern Jahre lang dem Nach-
sinnen über die Erfindung einer Rechenmaschine auf-
geopfert haben.
Der Pfarrer Hahn hat über seine Maschine 7 Jahre
gearbeitet.

Stern in Warschau 8 Jahre mit einem Aufwand
von mehr als 10000 Th.

Das Riesenwerk von Babbage in England, hat 6
Jahre Zeit und einen Kosten-Aufwand von 17000 Pfd
Sterling. erfordert

Stonemsky in Petersburg hat im Jahre 1844 eine sehr
einfache Rechenmaschine erfunden. Diese besteht aus
acht aneinanderhängenden Kästchen 14 Zoll lang 10 Zoll breit und
2 1/2 Zoll hoch, welche von je 2 bis auf 7 Stellen beliebigen Zahlen
alle 8 einfachen Potenzen d. h. das 2, 3, ..., 9-fache gibt und nur
6 bis 7 Thlr. kostet.

Leibniz
Fahrb.

Mag

1	15
12	6
8	10
13	3

Ludw. v. Müller's und w. d. H. v. Geographisches
 Jahrbuch von Behm 1^{ter} Band 2^{ter} 1866

Europa ma 285
 Asien 798
 Australien 1
 Afrika 188
 Amerika 74

milijonen meßmeilen
 milijon

Magische Kwadraty.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

3	20	7	24	11
16	8	25	12	4
9	21	13	5	17
22	14	1	18	10
15	2	19	6	23

